

STATISZTIKAI IDŐSORELEMZÉS A TŐZSDÉN

DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS

Polgárné Hoschek Mónika

Nyugat-magyarországi Egyetem

Sopron
2011.

STATISZTIKAI IDŐSORELEMZÉS

A TŐZSDÉN

Értekezés doktori (PhD) fokozat elnyerése érdekében

Készült a Nyugat-magyarországi Egyetem
Széchenyi István Gazdálkodás- és Szervezéstudományok Doktori Iskola
Pénzügyi programja keretében

Írta:

Polgárné Hoschek Mónika

Témavezető: Dr. Závoti József

.....

Elfogadásra javaslom (igen / nem)

(aláírás)

A jelölt a doktori szigorlaton % -ot ért el.

Sopron,

.....

a Szigorlati Bizottság elnöke

Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom (igen /nem)

Első bíráló (Dr.) igen /nem

.....

(aláírás)

Második bíráló (Dr.) igen /nem

.....

(aláírás)

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján % - ot ért el.

Sopron,

.....

a Bírálóbizottság elnöke

A doktori (PhD) oklevél minősítése.....

.....

Az EDT elnöke

TARTALOMJEGYZÉK

TARTALOMJEGYZÉK	5
ÁBRAJEGYZÉK	8
TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE	10
TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE	10
RÖVIDÍTÉSEK JEGYZÉKE.....	12
BEVEZETÉS.....	14
1 ELŐREJELZÉSEK	16
1.1 Kvalitatív előrejelzés	16
1.2 Kvantitatív előrejelzés	17
1.2.1 Kauzális módszerek.....	17
1.2.1.1 Többváltozós regressziós modellek.....	17
1.2.1.2 Ökonometriai modellek	18
1.2.1.3 Többváltozós Box-Jenkins modell	19
1.2.2 Projektív módszerek	19
1.2.2.1 Determinisztikus idősorelemzés.....	20
1.2.2.2 Kiegyenlítő eljárások.....	22
1.2.2.3 Sztochasztikus idősorelemzés.....	25
1.3 ARMA modellek	27
1.3.1 Stacionaritás	27
1.3.2 Identifikáció.....	28
1.3.3 Becslés.....	30
1.3.4 Diagnosztikai ellenőrzés.....	31
1.4 ARCH modellek	33
2 TŐZSDEI ELEMZÉS	36
2.1 A fundamentális elemzés.....	36
2.2 Technikai elemzés	37
3 RAX.....	40
4 ALKALMAZOTT MÓDSZEREK	44
4.1 Dekompozíció.....	44
4.1.1 Trendszerűség.....	44
4.1.1.1 Lineáris trendszerűség	45

4.1.1.2	Polinomiális trendek	47
4.1.1.3	Logisztikus trend	47
4.1.1.4	Log-lin trend	48
4.1.1.5	Log-log trend	48
4.1.1.6	A reziduális változóra vonatkozó feltételek tesztelése	49
4.1.1.7	Mozgóátlagolás.....	56
4.1.2	Konjunktúra hatás kiszűrése	57
4.1.3	Szezonalitás kiszűrése	58
4.1.4	Spline	60
4.1.5	Modellszelekciós kritériumok	66
4.2	ARMA modellek felépítése	68
4.3	ARCH modellek felépítése	73
4.4	Előrejelzések fajtái	74
5	A VIZSGÁLAT	76
5.1	A vizsgálat tárgya	76
5.2	Determinisztikus trendszámítás	77
5.2.1	Lineáris trend	77
5.2.2	Polinomiális trendek	82
5.2.3	Logisztikus trend	93
5.2.4	Logaritmikus trendek	95
5.2.5	Determinisztikus trendek összefoglalása	100
5.2.6	Ciklus hatás kiszűrése.....	101
5.2.7	Szezonális hatás kiszűrése	107
5.3	Új típusú spline-ok	110
5.4	A RAX ARMA modellje	114
5.4.1	Identifikáció.....	114
5.4.2	Becslés	118
5.4.3	Ellenőrzés	119
5.5	A RAX ARCH modellje.....	120
5.6	A RAX GARCH modellje	125
6	EREDMÉNYEK ÖSSZEGZÉSE, JAVASLATOK	128
6.1	Új/újszerű eredmények	128
6.2	Javaslatok	129
	ÖSSZEFOGLALÁS	131

SUMMARY	133
IRODALOMJEGYZÉK	135
1. MELLÉKLET.....	141
2. MELLÉKLET.....	156
NYILATKOZAT.....	157

ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra: Időbeli előrejelzések csoportosítása	35
2. ábra: A BUX index alakulásának vonaldiagramja 2007. január 2. - 2010. augusztus 10. között	38
3. ábra: A BUX index alakulásának japán gyertya diagramja 2009. december 22. – 2010. július 15. között	38
4. ábra: RAX időszora 2005. január 5. - 2007. november 6.....	45
5. ábra: Tipikus autokorrelációs esetek	50
6. ábra: Homoszkedaszticitás és heteroszkedaszticitás	52
7. ábra: Normál valószínűségi ábra	55
8. ábra: Két megfigyelésre illeszkedő polinom	60
9. ábra: Három megfigyelés és a polinomja	61
10. ábra: Több elemű megfigyelés és polinomja.....	61
11. ábra: Előrejelzés az időben	75
12. ábra: A RAX alakulása 2001. szeptember 7 - 2010. július 29.....	76
13. ábra: A RAX idősorára illesztett lineáris trend	77
14. ábra: Lineáris modell véletlen tagjai	78
15. ábra: A RAX volatilitása 2001. szeptember 7- 2010. július 29.....	80
16. ábra: A maradékok eloszlása és a normális eloszlás	81
17. ábra : A maradékok Q-Q plotja	82
18. ábra: Polinomiális trendek	85
19. ábra: Polinomiális trendek maradék tagjai	86
20. ábra: Polinomiális trendek reziduumaik eloszlása és Q-Q plotja	92
21. ábra: Logisztikus trend és a RAX.....	93
22. ábra: Logisztikus trend maradékainak normalitásvizsgálata	94
23. ábra: Log-lin és log-log trendek és a RAX.....	96
24. ábra: Log-lin és log-log trendek reziduumaik	97
25. ábra: Log-lin és log-log trendek reziduuma eloszlása és Q-Q plotja	99
26. ábra: Ötödfokú polinom ACF és PACF függvényei	103
27. ábra: Ötödfokú trend ACF és PACF függvénye PW regresszió után	104
28. ábra: Ötödfokú polinom, 50 tagú mozgóátlag és a ciklus	105
29. ábra: Ötödfokú polinom, 200 tagú mozgóátlag és a ciklus	106

30. ábra: Csak szezonalitást tartalmazó adatok (50es és 200as mozgóátlagból számítva)	107
31. ábra: Maradéktagok (50,4; 50,12; 200,4; 200;12).....	109
32. ábra: 9, 44 és 11 spline-ból épített trend.....	111
33. ábra: 9 tagú spline-nal képzett trendek véletlen tagjai	112
34. ábra: 11 tagú spline-nal képzett trendek véletlen tagjai	113
35. ábra: 44 tagú spline-nal képzett trendek véletlen tagjai	113
36. ábra: A RAX korrelogramja és parciális korrelogramja.....	117
37. ábra: Elsőrendűen differenciált RAX adatok ACF és PACF ábrája	118
38. ábra: A RAX hozamok eloszlása és Q-Q plotja	121
39. ábra: A RAX volatilitása 2001. szeptember 7. - 2010. július 29.....	121
40. ábra: A RAX hozamok ACF és PACF függvényei	122
41. ábra A RAX hozamnégyzetek ACF és PACF függvényei	123
42. ábra: $AR(1)+GARCH(1,1)$ modellnél reziduumok eloszlása	126
43. ábra: $AR(1)+GARCH(1,1)$ modellnél a standardizált reziduumok eloszlása	126
44. ábra: $AR(1)+GARCH(1,1)$ standardizált reziduumainak Q-Q plotja.....	127

TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE

1. Táblázat: Lineáris trend illesztése a RAX-ra.....	78
2. Táblázat: Autokorreláció tesztelése lineáris modell esetén.....	79
3. Táblázat: White teszt a heteroszkedaszticitásra.....	79
4. Táblázat: Breusch-Pagan teszt a heteroszkedaszticitásra.....	79
5. Táblázat: Maradékok eloszlása lineáris trend esetén.....	80
6. Táblázat: Polinomiális trendek	83
7. Táblázat: Polinomiális trendek modellválasztási kritériumai.....	84
8. Táblázat: Polinomiális trendek autokorrelációjának tesztelése.....	87
9. Táblázat: Polinomiális trendek White tesztje	88
10. Táblázat: Polinomiális trendek White tesztje (csak négyzetes tagok).....	89
11. Táblázat: Polinomiális trendek Breusch-Pagan tesztje.....	90
12. Táblázat: Polinomiális trendek illeszkedésvizsgálatának eredményei	91
13. Táblázat: Logisztikus trend számításának adatai.....	94
14. Táblázat: Log-lin és log-log trendek	95
15. Táblázat: Log-lin és log-log trendek autokorrelációjának ellenőrzése.....	97
16. Táblázat: Log-lin és log-log trendek maradékainak White tesztje.....	98
17. Táblázat: Log-lin és log-log trendek maradékainak Breusch-Pagan tesztje.....	99
18. Táblázat: Determinisztikus trendek összefoglaló táblázat.....	100
19. Táblázat: Ötödfokú polinom becslése	102
20. Táblázat: Prais-Winsten eljárás eredménye.....	102
21. Táblázat: Negyedéves szezonális eltérés adatok (50es és 200as mozgóátlagra).....	108
22. Táblázat: A determinisztikus trendek hibái	112
23. Táblázat: ADF teszt konstans taggal	115
24. Táblázat: ADF teszt konstans és trend jelenlétében	115
25. Táblázat: ADF teszt konstans és négyzetes trend jelenlétében	116
26. Táblázat: KPSS teszt 8 késleltetéssel	116
27. Táblázat: ARIMA(1,1,0) modell	119
28. Táblázat: Különböző ARMA modellek modellszelekciós kritériumai	119
29. Táblázat: A RAX hozamok alapstatisztikája.....	120
30. Táblázat: AR(1)+ARCH(1) modell eredményei	123
31. Táblázat: ARCH modellek modellszelekciós kritériumai	124

32. Táblázat: $AR(1)+GARCH(1,1)$ modell	125
---	-----

RÖVIDÍTÉSEK JEGYZÉKE

ACF - AutoCorrelation Function, autokorrelációs függvény

ADF – Augmented Dickley-Fuller test, kiterjesztett Dickley-Fuller teszt

AIC – Akaike Information Criterion, Akaike információs kritérium

BLUE – Best Linear Unbiased Estimation, legjobb lineáris torzítatlan becslés

CORC – Cochrane-Orcutt eljárás

DW - Durbin-Watson próba

FAE – Független és Azonos Eloszlású

HQ- Hannan-Quinn criterion, Hannan-Quinn kritériumú

KPSS - Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin teszt

LM - Lagrange Multiplikátor

ML – Maximum Likelihood

OLS – Ordinary Least Squares, legkisebb négyzetek elve

PACF – Partial AutoCorrelation Function, parciális autokorreláció függvény

PW – Prais-Winsten eljárás

SIC – Schwarz Information Criterion, Schwarz információs kritérium

SSE =ESS – sum of squares of error, explained sum of squares, hibák eltérés négyzetösszege, magyarázott négyzetösszeg

SSR= RSS –sum of squares of regression, residual sum of squares, regressziós eltérés négyzetösszeg, reziduális négyzetösszeg

WN - White Noise, fehér zaj

WLS - Weighted Least Squares, súlyozott legkisebb négyzetek módszere

BEVEZETÉS

A tőzsdei indexek értéke rendkívül fontos információt hordoz a befektetők számára. A döntéseiknél azonban a „múltat” tükröző indexnél sokkal fontosabb lenne egy olyan mutatóval rendelkezni, ami a jövőt vetíti előre. Erre a problémára tökéletes megoldás még nem született.

A statisztikában az idősor elemzés különböző módszereket alkalmaz az elmúlt időszak tendenciáinak, összefüggéseinek a feltárására és egyben támpontot nyújt a jövő várható folyamatainak előrelátásához. Kutatásom során azt vizsgáltam, hogy az előrejelzési módszereket felhasználva mennyire megbízható jövőbeni index értékeket lehet meghatározni.

A célom az volt, hogy előrejelzést adjak az egyik magyar tőzsdei index, a RAX értékének alakulására vonatkozóan. Ahogyan a történelem során minden eljárási módszer finomodott, tökéletesedett, úgy a statisztikai előrejelzéseknél is megtörtént ez a változás. A különböző előrejelzési módszereket felhasználva készítettem előrejelzést a '70-es évekig uralkodó determinisztikus szemléletet követve, majd a '80-as évek kedvelt *ARMA* modelljeivel, míg utoljára a legfiatalabb módszer család, az *ARCH* modellek felhasználásával.

A kutatás során döbbsentem rá, hogy a magyar és a nemzetközi szakirodalom nem egységes az időbeni előrejelzések csoportosítása során, így először ebben kellett egy egységes rendszert létrehoznom.

A disszertáció felépítését az előrejelzési módszerek csoportosításával kezdem, megmutatva a főbb módszerek lényeges összefüggéseit. A második fejezetben a tőzsdei elemzés két típusát mutatom be, részletesebben foglalkozva a technikai elemzéssel, hiszen ez az elemzés a statisztikai eszköztár több elemét felhasználja és a kutatásaimat is befolyásolta a technikai elemzés módszertana. A tőzsdei indexek közül a RAX-ot elemeztem ezért a harmadik fejezet a befektetési alapokról és magáról a RAX-ról szól. A negyedik fejezetben az alkalmazott módszerek, próbák kerülnek ismertetésre. Az ötödik fejezet tartalmazza a

kutatási eredményeket, a különböző módszerekkel készített modelleket és előrejelzéseiket. A hatodik, utolsó fejezetben az eredményeket foglalom össze, illetve megfogalmazom a későbbi céljaimat, a további kutatási lehetőségeket.

A disszertáció megírásához felhasznált könyvek, jegyzetek, cikkek jelöléseit egységes formára hoztam. A továbbiakban csak azon egyenleteknél hivatkozom az eredeti szerzőre, ahol nem közismert, általánosan használt összefüggésről van szó.

Az adatok feldolgozásához és a modellek felépítéséhez a GRELT (Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library) nevű ökonometriai programot használtam. A program ingyenesen hozzáférhető az interneten¹, illetve egy korai verziója a Magyarországon forgalomban lévő két nagy ökonometriai könyv egyikéhez [55] mellékelve van. A spline-okból felépített trendet MapleV 5 programcsomagban írt program segítségével határoztam meg.

¹ <http://gretl.sourceforge.net/>

1 ELŐREJELZÉSEK

A magyar és a nemzetközi szakirodalomban az időben történő előrejelzéseket különböző módon csoportosítják, különböző elnevezéseket használnak. Dolgozatomban megpróbálom ezeket közös nevezőre hozni és egy olyan osztályozást adni, amely mindkét „félnek” elfogadható, a két terület felfogását ötvözi.

Abban mind a hazai mind pedig a külföldi szakírók egyetértenek, hogy az előrejelzés lehet kvantitatív és kvalitatív, azaz a számokon alapuló, illetve a minőségi.

1.1 Kvalitatív előrejelzés

Chatfield [14] ezt a típust *szubjektív* előrejelzésnek hívja, hiszen a megkérdezett személyek tapasztalatán, tudásán, megérzésein alapszik. Ezek a megkérdezettek lehetnek a menedzsment tagjai, piackutatók, szakértők. (Ezért találkozhatunk ezzel a csoporttal kollektív szakértői megkérdezés címen is.) A megkérdezettek minden esetben olyan személyek, akik a vizsgált területet behatóan ismerik, és így képesek olyan dolgok, változások meglátására, előrejelzésére, amiket mások nem tudnának.

Ilyen előrejelzési módok:

- Delphi-módszer,
- szakértői becslés,
- brainstorming, ötletroham,
- piackutatás,
- story telling módszer,
- egyéb.

1.2 Kvantitatív előrejelzés

Ezek az előrejelzések már objektívebbek, hiszen a számok elemzésén alapszanak. Attól függően, hogy az adott jelenség okát vagy a múltbeli értékeit tekinti-e vizsgálata alapjának két nagy csoportra lehet osztani:

- Kauzális módszerek
- Projektív módszerek

1.2.1 Kauzális módszerek

Ahogy az a módszer család megnevezéséből is látszik, itt a jelenség okának a feltárása a cél, és ha már ez megvan, akkor jöhet a jövő prognosztizálása. Mivel egy jelenségnek csak nagyon ritkán van egyetlen oka, így ezeket a módszereket *többváltozós modelleknek* is szokás nevezni.

1.2.1.1 Többváltozós regressziós modellek

A regresszió-elemzés feladata annak jellemzése, hogy a tényezőváltozó (x) milyen módon, milyen törvényszerűség szerint fejt ki hatását az eredményváltozóra (y) (Ramanathan [37]). A regressziószámítás során háromféle regresszióval találkozhatunk:

- Analitikus regresszió - amit a megfigyelt adatainkból számítunk ki egy előre meghatározott formula segítségével. Amikor a tudományos életben valaki a regresszió kifejezéssel találkozik, akkor ott az analitikus regresszióval foglalkoznak. Ebben a regresszióban a legfontosabb a megfelelő függvénytípus kiválasztása, majd pedig a kiválasztott függvény paramétereinek kiszámítása. A leggyakrabban használt függvénytípusok a lineáris, exponenciális, hatványkitevős, polinomiális, hiperbolikus és a lin-log.

- Elméleti regresszió – ami a feltételes várható értékkel definiálható, azaz y -nak x -re vonatkozó elméleti regressziója $y = E(y|x)$
- Tapasztalati (empirikus) regresszió – ami tulajdonképpen egy részátlagokból képzett statisztikai sor, ahol x és y értékek a következőképpen alakulnak:

x értékek (x_i)	y részátlagok ($\bar{y}_i$)	
x_1	$\bar{y}_1(x_1) = \bar{y}_1$	
x_2	$\bar{y}_2(x_2) = \bar{y}_2$	
$\vdots$	$\vdots$	
x_k	$\bar{y}_k(x_k) = \bar{y}_k$	(1.1.)

A többváltozós regressziónál a magyarázott változóra (y) nem csak egy, hanem több magyarázó változó ($x_1, x_2, \dots, x_k$) is hatást gyakorol egy időben. A többváltozós regressziós modellek közül a lineáris a legelterjedtebb. Ennek nem csak az egyszerűsége, könnyű értelmezhetősége az oka, hanem az is, hogy a legtöbb közgazdasági folyamat vagy jól közelíthető a lineáris regresszióval, vagy arra könnyen visszavezethető. A többváltozós lineáris regressziós modell általános alakja:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t \quad (1.2.)$$

ahol ε maradéktag normális eloszlású valószínűségi változó, amelyre $E(\varepsilon_t | x_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t | x_t) = \sigma^2$ és $Cov(\varepsilon_s, \varepsilon_t | x_t) = 0$, minden $s \neq t$ -re, azaz független és azonos eloszlású².

1.2.1.2 Ökonometriai modellek

Az ökonometria a közgazdasági összefüggések, a gazdasági magatartás becslésével, a közgazdasági elmélet és tények szembesítésével és hipotézisvizsgálatával, valamint a közgazdasági változók viselkedésének előrejelzésével foglalkozik (Ramanathan [55]) a

² Az ilyen jellemzők leírására a szokásos jelölés a FAE.

statisztika eszköztárát felhasználva. Az ökonometriai elemzések első és legfontosabb feladata a vizsgált folyamatot „jól”³ leíró modell elkészítése.

Az ökonometriai modellből nyert változót *endogén változónak*, az endogén változóban fellépő törvényszerűségeket feltáró változókat pedig *magyarázó változóknak* nevezzük. A modellben lehetnek olyan változók is, melyek értéke a modellen kívülről adódik, azaz ökonometriai modellből nem levezethető, ezeket hívjuk *egzogén változónak*. Amennyiben ilyen egzogén változók is jelen vannak a modellünkben, akkor az előrejelzésünk feltételes⁴ lesz. Az ökonometriai modellek fontos része a hibatag, amely a vizsgálati szempontból lényegtelen változók és az előre nem látható események összessége (Maddala [39]).

1.2.1.3 Többváltozós Box-Jenkins modell

G. E. Box és G. M. Jenkins 1968-ban publikálták cikküket [6] , melyben a 1.2.2. alfejezetben leírt módszerüket ismertették. Ennek az eljárásnak a kiterjesztése a többváltozós modell, melyben a klasszikus *ARMA* modellt bővítik ki, és amelyet *transzfer funktions modellnek* neveztek el.

1.2.2 Projektív módszerek

Ez a módszer család egyváltozós. Az előrejelzések ezen típusai az idősorokat használják fel, a múltból (mint egyetlen vizsgált változóból) indulnak ki, azt vizsgálják, majd pedig annak felhasználásával próbálnak a jövőre vonatkozó prognózisokat adni. A múltnak tehát itt kiemelt jelentősége van. Ám amíg a projektív módszerek egyik csoportja elfogadja,

³ A modell jósága mindig az elemzést végzőktől, a felépített szempontrendszerrel függ. Bizonyos szempontból lehet egy egyszerű modell is jó, valamikor viszont csak egy összetett, soktényezős modell felel meg a vizsgálat kritériumainak.

⁴ Feltételes előrejelzés: ha az eredményváltozót azon feltételezés mellett jelezzük előre, hogy a magyarázóváltozók bizonyos értékekkel rendelkeznek (Ramanathan [55]). Ha a modellből vagy egy segédmodellből kapjuk meg a magyarázóváltozók értékét, akkor feltétel nélküli előrejelzésről beszélünk.

hogy minden előre elrendelt, determinált, addig a másik csoport már nem gondolja, hogy elég a tendenciák automatikus jövőre való kivetítése.

1.2.2.1 Determinisztikus idősorelemzés

Minden előre elrendelt, az események előre determinált pályán mozognak. Ezt a feltételezést követi a determinisztikus idősorelemzés. Amennyiben ez valóban így van, akkor a legfontosabb feladat ennek az elrendelt pályának a megismerése azért, hogy a jövő alakulását képesek legyünk előre jelezni. Az előrejelzéshez tehát ismernünk kell az út részeit, elemeit. Ehhez részeire kell bontanunk az idősort, azaz dekompozícióra van szükség.

Az idősor négy része a trend, a ciklus, a szezon és a véletlen.

1. *trend* vagy *alapirányzat*: az idősorban hosszabb időszakon tartósan érvényesülő tendencia, amely az idősor alakulásának a fő irányát, általános színvonalát jelenti. Az alapirányzat maga is több, hosszútávon érvényesülő tényező együttes hatásának a következménye. Alapvetően társadalmi, gazdasági törvényszerűségek (pl.: demográfiai változások, technológiai változások, preferenciákban bekövetkező változások, a piac növekedése, az infláció, a defláció) határozzák meg.

2. *ciklus*: a trend feletti vagy alatti tartósabb, nem szabályos mozgás, így jelentését csak hosszabb idősorok alapján lehet felfedni és tanulmányozni. Ennek a komponensnek az elemzéséről gyakran elfeledkeznek⁵, pedig kiszűrése az időorból fontos, hiszen nélküle a kapott eredmények torzak lehetnek.

3. *szezonális vagy idényszerű ingadozás*: azonos hullámhosszú és szabályos amplitúdójú, többnyire rövid távú ingadozás. Azaz olyan ritmikus ingadozás, amely szabályosan visszatérő időközönként mindig azonos irányba téríti el az idősor értékét az alapirányzattól. A gazdasági idősorok szinte mindegyike mutat éves periódusokban ismétlődő szezonális ingadozást és/vagy periodikus ingadozást. Az ingadozás lehet akár

⁵ Korpás Attiláné Dr.: Általános statisztika II. című könyvében [34] az idősornak csak 3 elemét említi, és így csak három elemmel számol.

napi, hetes, hónapos, attól függően, hogy mi okozta (pl.: évszakok változása, ünnepek, társadalmi szokások).

4. *véletlen ingadozás*: szabálytalan mozgás, ami sok esetben nem mutat semmilyen szisztematikusságot. Sok, az idősor szempontjából nem jelentős tényező együttes hatását képviseli. Szabálytalan jellege miatt az idősorra gyakorolt hatását a múltra ki tudjuk mutatni, ám előre jelezni nem lehet⁶.

A dekompozíciós modelleknél az idősorok négy része egymással kétféle kapcsolatban lehet:

- Additív modell: az idősor elemeinek hatása összeadódik

$$y_{ij} = \hat{y}_{ij} + c_{ij} + s_j + \varepsilon_{ij} \quad (1.3.)$$

- Multiplikatív modell: az idősor elemeinek hatása összeszorozódik

$$y_{ij} = \hat{y}_{ij} \cdot c_{ij} \cdot s_j \cdot \varepsilon_{ij} \quad (1.4.)$$

ahol y az idősor értéke

$\hat{y}$ a trend

c a ciklus

s a szezonális komponens

ε a véletlen ingadozás

$i = 1, 2, \dots, n$ a periódusok száma

$j = 1, 2, \dots, m$ a perióduson belüli rövidebb időszakok száma

⁶ Az 1.2.2.3-ban ismertetett sztochasztikus időelemzés éppen ezzel foglalkozik.

A determinisztikus eljárások a véletlennek igen kis jelentőséget tulajdonítanak. Ám a véletlen képes az idősor elemei közül leginkább befolyásolni a közeljövő eseményeit. Éppen ezért megbízható előrejelzések elsősorban hosszabb távra készíthetők a dekompozíciós modellekkel.

1.2.2.2 Kiegyenlítő eljárások

A projektív módszerek a múltból indulnak ki és annak ismeretében képesek előrejelzések készítésére. Amíg a determinisztikus modellek eleve elrendeltnek tekintik a jövőt, addig a kiegyenlítő eljárások már élnek azzal a feltételezéssel, hogy a múlt nem minden elemének van ugyanolyan jelentősége, befolyásoló hatása a jövőre. A simító eljárások tehát figyelembe veszik azt a tényt, hogy a múltbeli események hatása az idővel csökken, nem kell valamennyi már meglévő adatot ugyanazzal a súllyal szerepeltetni, szükség van a fokozatos felülvizsgálatra.

A simító eljárások lényege, hogy a prognózis során a becsült ($\hat{y}$) és a megfigyelt (y) érték közötti eltérést, hibát (e), már beépíti a következő becslésbe, azaz előrejelzést korrigálja a korábban elkövetett hibák értékével:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha f(e_t) \quad (1.5.)$$

Az α a simító paraméter, amely a simítás mértékét adja meg, vagyis azt, hogy a korábbi hibákat milyen mértékben vesszük figyelembe. Ha az α értéke alacsony, akkor a hibát kevésbé építi be, az idősorunk rendkívül kisimulhat. Amennyiben azonban az α értéke a maximumhoz, az 1-hez közelít, a hibát kellően figyelembe vesszük, ám ebben az esetben a véletlen ingadozások is kiszűrődnek és a tendencia már nem rajzolódik ki megfelelően. Az f függvény legegyszerűbb esete, ha a simító paraméter az elkövetett hibával szorozódik össze.

Az exponenciális kiegyenlítésnél a jelenhez közelebb eső eseményeknek nagyobb súlyt adhatunk, mint a már „múltba vesző” adatoknak. Az egyszeres exponenciális simítás modellje rendelkezik a szisztematikus tanulás képességével (Ralph et. al.[54]), azaz:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.6.)$$

Itt az előrejelzés két komponensnek a súlyozott átlagából adódik, ahol a megfigyelt adat súlya a simító paraméter, míg a becsült értéké annak komplementere. Felírva a többi időszakra is a kifejezést megkapjuk a

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} &= \alpha y_t + (1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} y_1 + (1 - \alpha)^t y_1 \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \alpha(1 - \alpha)^i y_{t-i} + (1 - \alpha)^t \hat{y}_1 \end{aligned} \quad (1.7.)$$

kifejezést, ahol a t -t végtelenül nagyra tekintve az induló érték ($\hat{y}_1$) eltűnik, s a megmaradt résznél a súlyok $(1 - \alpha)$ hatványai szerint exponenciálisan csökkennek. (Innen ered az eljárás megnevezése is.)

Az egyszeres simítás csak abban az esetben használható, ha a vizsgált adatok nem mutatnak semmilyen szezonalitást és trend sem figyelhető meg.

Kétszeres exponenciális simításnál a simítást kétszer végezzük el egymás után. Az ismert eljárások közül a két leginkább elterjedt számítási módot, a Brown-féle exponenciális simítást (Brown [12]) és a Holt-módszert (Holt [27]) emelném ki.

A Brown-féle simítás az egyszerűbb módszer, mert ennek során a már ismert egyszeres simítást kell kétszer egymás után elvégezni, azaz a már kisimított idősort újra ugyanazzal az α simító paraméterrel ismét simítjuk.

Az egyszeres simítás némileg megváltozott jelölésekkel a következő formában adható meg:

$$S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1}^{(1)} \quad (1.8.)$$

ahol $S_t^{(1)}$ jelöli a t -dik időszaki becsült érték az egyszeres simítás után.

Ezután az előzővel analóg módon elvégzem a második simítást:

$$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1 - \alpha)S_{t-1}^{(2)} \quad (1.9.)$$

ahol $S_t^{(2)}$ jelöli a t -dik időszaki becsült érték a kétszeres simítás után. Az inicializálás, azaz a kezdeti érték meghatározása rendkívül fontos. Az általános gyakorlat alapján a kezdeti értékeknek az idősor első elemét tekintjük.

A jövőbeni értékek előrejelzéséhez a

$$\hat{y}_{t+1} = 2S_t^{(1)} - S_{t-1}^{(2)} \quad (1.10.)$$

egyenletet használhatjuk, felhasználva mind az egyszeres, mind a kétszeres simítással kapott idősor adatokat.

A Holt-módszer annyiban különbözik az előzőekben bemutatottól, hogy az első simítás után a második simítás, amely a trendet jelzi előre, már más simító paraméterrel dolgozik:

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha D_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} - G_{t-1}) \\ G_t &= \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)G_{t-1} \end{aligned} \quad (1.11.)$$

ahol S_t az első simítás utáni, G_t a második simítás utáni, D_t pedig a megfigyelt érték.

Az előrejelzéshez (F_{t+1} értékének meghatározásához) a két simítás utáni értéket kell felhasználni:

$$F_{t+1} = S_t + G_t \quad (1.12.)$$

illetve egy későbbi időpontra történő előrejelzés esetén:

$$F_{t,t+\tau} = S_t + \tau \cdot G_t \quad (1.13.)$$

Az S_1 kezdeti értéknek általában a megfigyelt adatot tekintjük, míg a G_1 értékére három ajánlás létezik.

1.2.2.3 Sztochasztikus idősoelemzés

Sem a determinisztikus modellek, sem a simító eljárások nem helyeznek nagy hangsúlyt a véletlenre, azaz a sztochasztikus tagra. Ebben a fejezetben azokat a modelleket mutatom be, amelyek éppen a véletlennek tulajdonítják a legnagyobb szerepet.

Véletlen bolyongás

Egy y_t folyamatot véletlen bolyongásnak hívunk, amennyiben

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.14.)$$

formában írható fel, ahol ε_t konstans várható értékű, konstans varianciájú és autokorrelálatlan, azaz valódi véletlen folyamatot ír le⁷.

Autoregresszív modellek (AR)

Amennyiben a vizsgált idősor sem trend-, sem ciklus-, sem pedig szezon-hatást nem tartalmaz, akkor az y adataink jól modellezhetők az autoregresszív modellekkel ($AR(p)$):

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1.15.)$$

⁷ Az ilyen véletlen folyamatokat fehér zajnak (white noise) nevezi a szakirodalom.

ahol ε_t tisztán fehér zaj folyamat. Vagyis a magyarázott változó kizárólag saját korábbi értékeinek függvénye. Abban az esetben, amikor csak az előző időszaki értékkel van kapcsolatban, azaz csak egy periódussal késleltetett a változónk, akkor elsőrendű autoregresszív folyamattal (AR(1)) állunk szemben:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.16.)$$

Mozgóátlag modellek (MA)

Ha egy y_t változó fehér zaj maradék tagok lineáris kombinációjából áll, akkor q -ad rendű mozgóátlag folyamatról beszélünk:

$$y_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.17.)$$

ahol ε_t FAE fehér zaj. Azt az összefüggést gyakran kicsit módosított formában írják fel:

$$y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.18.)$$

ARMA modellek

Az előző két modellek egyesítése az autoregresszív mozgóátlagolású (ARMA) modell:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.19.)$$

A folyamat p számú autoregresszív és q számú mozgóátlag tagot tartalmaz, így ennek jelölése $ARMA(p, q)$.

Gazdasági idősorokkal kapcsolatos feladatok közül sok könnyen megoldható ARMA modellel, így ezekről a következő fejezetben részletesen számolok be.

1.3 ARMA modellek

A társadalmi, természettudományos és a gazdasági folyamatokat, azok időbeli lefolyását nagyban befolyásolja a véletlen. Éppen ezért olyan elterjedt az idősorelemzés ezen módja, melyben a véletlennek kiemelt szerep jut.

Az *ARMA* modellek paramétereinek meghatározására és a kapott modellek jóságának ellenőrzésére G. E. P. Box és G. M. Jenkins [7] 1968-ban jelentetett meg egy három lépésből álló megközelítést:

1. Identifikáció
2. Becslés
3. Diagnosztikai ellenőrzés

A modellek ilyen formán történő kialakítása olyannyira elterjedt, hogy az idősorelemzés ezen típusát gyakran hívják Box-Jenkins modellnek.

1.3.1 Stacionaritás

Az *ARMA* modellek felépítése során többször előkerül a stacionaritás fogalma. Ha egy idősor maradék tagjának várható értéke, varianciája, autokovarianciája⁸ nem függ az időtől, akkor az adott idősor stacionárius. Tehát

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{és} \quad \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad \text{és} \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \sigma^2 \cdot \rho_k$$

ahol ρ_k a k -dik késleltetéshez tartozó autokorreláció értéke.

A stacionárius folyamat lefutása az időben stabil, nincs trendhatás. Az ilyen idősrnak viszonylag nagy a rövid távú előrejelezhetősége.

⁸ Autokovariancia független az időtől, ha adott hibatag nincs korrelációban egy előző hibataggal.

A stacionaritásnak két változata van, a trendstacionárius és a differenciastacionárius idősor.

- Trendstacionárius idősor: $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t$ (1.20.)

Az ilyen idősorokban lévő trendet regressziós összefüggést alkalmazva szabad csupán kiszűrni. [43] . A trendstacionárius idősorokban az adatokat ért sokk hatása idővel csökken, majd teljesen el is tűnik, lecseng.

- Differenciastacionárius idősor: $y_t = y_0 + \beta \cdot t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ (1.21.)

A legtöbb gazdasági idősor inkább differenciastacionárius [39] , hiszen a vizsgált változókat ért sokkok hatása tartós. Ha az ilyen idősorokban trend van, akkor azt csak differenciálással szabad kiszűrni.

1.3.2 Identifikáció

A Box-Jenkins modellezés első lépésében az $ARMA(p,q)$ folyamat paramétereit, vagyis q -t és p -t kell meghatározni. A fázis lényege tehát megtalálni a tapasztalati idősort legjobban leíró elméleti idősort. A munkában nagy segítségünkre lehet, ha a megfigyelt adatokat az idő függvényében ábrázoljuk.

Ekkor szembesülhetünk azzal a ténnyel, hogy az idősorunkban milyen trend van. Amennyiben lineáris trenddel van dolgunk, úgy akkor elegendő az adatsorunkat differenciálni. A differenciált adatokból készített ábránk már remélhetőleg nem mutat további trendet. Ám amennyiben mégis, ismételt differenciálásra van szükség. Mivel a gazdasági idősorok általában tartalmaznak trendet, így igen valószínű, hogy szükség lesz a differenciálásra. A tapasztalatok alapján azonban kétszeri differenciálással a trend problémája megszüntethető.

Ha az ábránkon az adatok exponenciális növekedést mutatnak, akkor az adatsort először logaritmizálni kell, majd ezután újabb ábrát kell készíteni.

A differenciálás és ezáltal a trend kiszűrése azért fontos, mert az $ARMA(p, q)$ folyamat becsléséhez a vizsgált idősor stacionárius kell, hogy legyen.

Mint azt már bemutattam, az idősoroknak nem csak trend komponense van. Ha az idősorunk szezonális komponenst is tartalmaz, akkor a stacionaritás kritériuma sérül. A legegyszerűbb mód ismét csak a differenciálás. $y_t - y_{t-12}$ -ed fokú differencia képzés az esetek nagy részében elegendő (amennyiben évszakok, negyedévek miatti szezonális hatás jellemző). Léteznek kifejezetten szezonalitást kezelő programok is, mint a *TRAMO / SEATS* vagy az $X - 12$ *ARIMA*.

Ha a Box-Jenkins modell első lépésében azt tapasztaltuk, hogy az idősorunk nem stacionárius, akkor differenciálunk, hiszen különben nem lehetne az előrejelzést elkészíteni. Az első lépésben nem csupán q és p paramétert kell előzetesen megbecsülnünk, hanem a differenciálások fokát (d) is, amely beépül a modellünkbe, amit ezentúl $ARIMA(p, d, q)$ ⁹-nak fogunk hívni.

A vizsgált adatok időbeni ábrázolásán kívül egy másik ábra segítségével is el lehet dönteni, hogy szükséges-e a differenciálás. Ez a korrelogram (autokorrelációs függvény, *ACF*), ami egy sor adatainak és a múltbeli értékeinek korrelációs együtthatóinak, azaz az autokorrelációs együtthatók ábrája.

$$r(s) = Cor(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \frac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s})}{Var(\varepsilon_t)} = \frac{E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s})}{E(\varepsilon_t^2)} \quad (1.22.)$$

Az *ACF* grafikonon s függvényében van ábrázolva $r(s)$.

Amennyiben a kapott görbe csak lassan csökken, akkor biztosan szükséges legalább egy differenciálás. A differenciálás elvégzése után, elkészítve a következő korrelogrammot, ismét csak a csökkenés mértékét kell vizsgálni.

⁹ AutoRegressive Integrated Moving Average – autoregresszív integrált mozgóátlag

Az autokorrelációs függvény felrajzolása nem csak abban segít, hogy az idősorunkat stacionáriussá tudjuk tenni, hanem abban is, hogy az mozgóátlagolású (MA) tag q -fokára egy kezdeti becslést tudjunk adni. Ehhez a korrelogram alakját kell csak megvizsgálni. Ha a korrelogram q -nál kisebb értékeknél nem mutat semmilyen határozott alakot, míg q -tól nagyobb értékekre nulla, akkor a késleltetéseknek q -t kell választani. Vagyis pl. elsőrendű mozgóátlag (MA(1)) folyamat esetén kizárólag ez első érték nem nulla, az összes többi az.

Az autoregresszív (AR) tag p kezdeti értékének eldöntésében a korrelogram helyett egy másik függvényt használunk, ez a parciális autokorreláció függvény (PACF). A PACF a magasabb rendű autokorrelációk hatást megtisztítja az alacsonyabb rendű autokorrelációk hatásaitól.

A parciális korrelogram értéke egy bizonyos késleltetés után nulla körül fog mozogni. Ez a késleltetés lesz a p kezdeti értéke. Azaz egy elsőrendű autokorrelációs (AR(1)) folyamatnál a parciális korrelogram első eleme nem nulla, a többi mind nulla közelében marad.

Mind a p , mind a q értékre lehet levonni következtetése mindkét görbe alakjából. Ha egyik ábra sem mutatja egyértelműen, hogy milyen rendű folyamatot kellene vázolni, akkor a legegyszerűbb egy ARMA(1,1)-el indítani a számításainkat.

1.3.3 Becslés

A modell ezen pontján a

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.23.)$$

egyenlet paramétereinek (remélhetően) végleges értékét kell megbecsülni. A becslés maximum likelihood (ML) módszerrel történik.

1.3.4 Diagnosztikai ellenőrzés

Ebben a fázisban ellenőriznünk kell, hogy megfelelően illeszkedik-e a modellünk az adatokhoz, vagyis a modellünk jóságát. Ha a felírt modell helyes, akkor a reziduumok fehér zaj folyamatot képeznek. Ehhez Box és Pierce [9] 1970-ben kidolgozott tesztjét alkalmazzuk, ahol kiszámítva a tesztstatisztika

$$Q = n \sum_{k=1}^K r_k^2 \quad (1.24.)$$

értékét azt egy $K - p - q$ szabadságfokú χ^2_{K-p-q} eloszlás kritikus értékével hasonlítjuk össze. (K a számított autokorrelációs együtthatók száma, r_k az $\hat{\varepsilon}_t$ maradékok k -ad rendű autokorrelációs együtthatója.) A nem-paraméteres próba során jobb oldali kritikus tartománnyal dolgozunk, ahol az alapfeltevés (H_0), hogy a reziduumok fehér zajok¹⁰. Így amennyiben a számított Q érték nagyobb a kritikus értéknél, akkor a modellünk nem helyes.

A Box-Pierce tesztek nagy problémája hogy kis minta esetén nem megbízható az eredménye, ezért is szokták a Ljung-Box tesztet [8] is elvégezni. A teszt menete megegyezik a Box-Pierce tesztével, az alapfeltevés és a kiértékelés is azonos, csupán a tesztstatisztika értéke számíthat másképpen:

$$Q' = n'(n' + 2) \sum_{k=1}^K \frac{r_k^2}{n' - k} \quad (1.25.)$$

ahol $n' = n - d$, vagyis a minta elemszáma mínusz a differenciálások száma.

Ha az elvégzett tesztek azt mutatják, hogy a felépített modellünk nem hatékony, akkor a Box-Jenkins eljárást az első lépéssel kell előlről kezdeni. A specifikáció módosítása után újabb becslést kell készíteni, majd azt is tesztelni. A folyamatot addig kell ismételni, amíg

¹⁰ Az ilyen alapfeltevésű próbákat portmanteau tesztnek is szokták hívni.

a harmadik fázisban a tesztek eredménye nem igazolja az alapfeltevésünket, azaz hogy a megfigyelt folyamat $ARMA(p, q)$ vagy $ARIMA(p, d, q)$ folyamat.

Ha a tesztek eredménye kielégítő, akkor jöhet egy végső lépés, az előrejelzés. A felépített modellből elkészítjük a tényleges előrejelzést, hiszen ez az idősorelemzés célja.

Az $ARMA$ modellek kifejezés az 1.3. fejezet címében arra utal, hogy létezik több ilyen modell is. A modell-család már számtalan tagból áll. Így létezik:

- $ARMA$ - a már ismertetett alapmodell
- $GARMA$ (Generalized $ARMA$) – általánosított $ARMA$,
- $NARMA$ (Non-linear $ARMA$) – nemlineáris $ARMA$, amikor az autoregresszív vagy a mozgóátlagolású tag nem lineáris
- $ARMAX$ ($ARMA + \text{exogenous variables}$) - $ARMA + \text{exogenous}$ változó, $ARMAX(p, q, b)$

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^b \eta_i d_{t-i} \quad (1.26.)$$

ahol p az autoregresszív, q a mozgóátlagolású, b az egzogén tagok száma. η_i az egzogén változó paraméterei.

- $ARIMA$ - nemstacionárius idősorok alapmodellje
- $VARIMA$ (Vector $ARMA$) – Vektor $ARMA$, amikor egyszerre több idősort kell illeszteni, és a változók közötti kapcsolatot szeretnénk leírni tudva, hogy a változó értéke nem csak saját, hanem egy másik változó múltbeli értékétől is függ.
- $SARIMA$ (Seasonal $ARMA$) - szezonális $ARMA$,
- $FARIMA$ - $ARFIMA$ (Fractional $ARIMA$, Fractionally Integrated $ARMA$) – fraktális $ARIMA$ annyiban különbözik az alapmodelljétől, hogy a d paraméternek megengedett a tört érték felvétele is.

Az *ARMA*modellek nagy problémája, hogy a stacionaritás szükséges hozzá. Ám a gazdasági élet és különösen a tőzsde idősorainál a véletlen tag szórása nem állandó az időben. Ennek a problémának a feloldására találta ki Robert F. Engle az idősorelemzések sztochasztikus családjának egy új elemét az *ARCH* modellt.

1.4 *ARCH* modellek

Az *ARCH* modellek rendkívül elterjedtek a pénzügyi gyakorlatban. Ennek Engle [22] szerint 3 oka van:

- az előrejelezhetetlenség, azaz a nyereség mértéke nehezen meghatározható,
- a vastag szélek, vagyis a kiugró (outlier) értékek meglepően nagy száma,
- a volatilitás klasztereződése, tömörülése, amikor a csendes időszakokat extrém kiugró értékekkel teli időszak követi.

Ezeknek a jellemzőknek a kezelésére hozták létre az AutoRegressiv Conditional Heteroscedasticity, autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás modelleket (*ARCH*). A modell megnevezésében az autoregresszív arra utal, hogy az eltérésváltozó varianciája adott időpontban az azt megelőző eltérésváltozók négyzetétől függ. A feltételes jelző oka, hogy a magyarázó változót, vagyis a variancia értékét egy segédmodellből kapjuk, hiszen variancia az előző időszaki varianciák függvénye. Ezen tulajdonság eredményezi az utolsó jelző, azaz a heteroszkedaszticitás kifejezést, hiszen a varianciák nem állandóak.

Az *ARCH*(q) modell három egyenlettel írható le:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \dots + \phi y_{t-m} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t \quad (1.27.)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

ahol $\eta_t \sim FAE(0,1)$ fehér zaj.

Az első egyenletben a vizsgált változó várható értékét adjuk meg. Látható, hogy a változó saját múltbeli értékeinek függvénye, ez tehát az autoregresszív tag. Amennyiben egy *AR(1)* folyamatról van szó, akkor annak várható értéke a következőre egyszerűsödik:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.28.)$$

Az eltérésváltozó (ε_t) értékét a második egyenletből kapjuk, ahol a véletlenről már egyértelműen látszik, hogy független, ám már nem azonos eloszlású, a feltételes varianciájuk az időben változik.

Az utolsó egyenletből a korábbi hibatag (innováció) hatását tudhatjuk meg. Amennyiben az előző eltérés nagy volt, úgy az adott időszakra is nagy maradék várható, míg kicsi hibát kicsi követ. Az egyenletből szintén látszik, hogy az eltérés előjele nem számít, hiszen a négyzetes taggal az eltűnik.

Az *ARCH* modellek széles körben elterjedtek. Egy egész modellcsalád lett belőle¹¹. Néhány a legismertebb modellek közül:

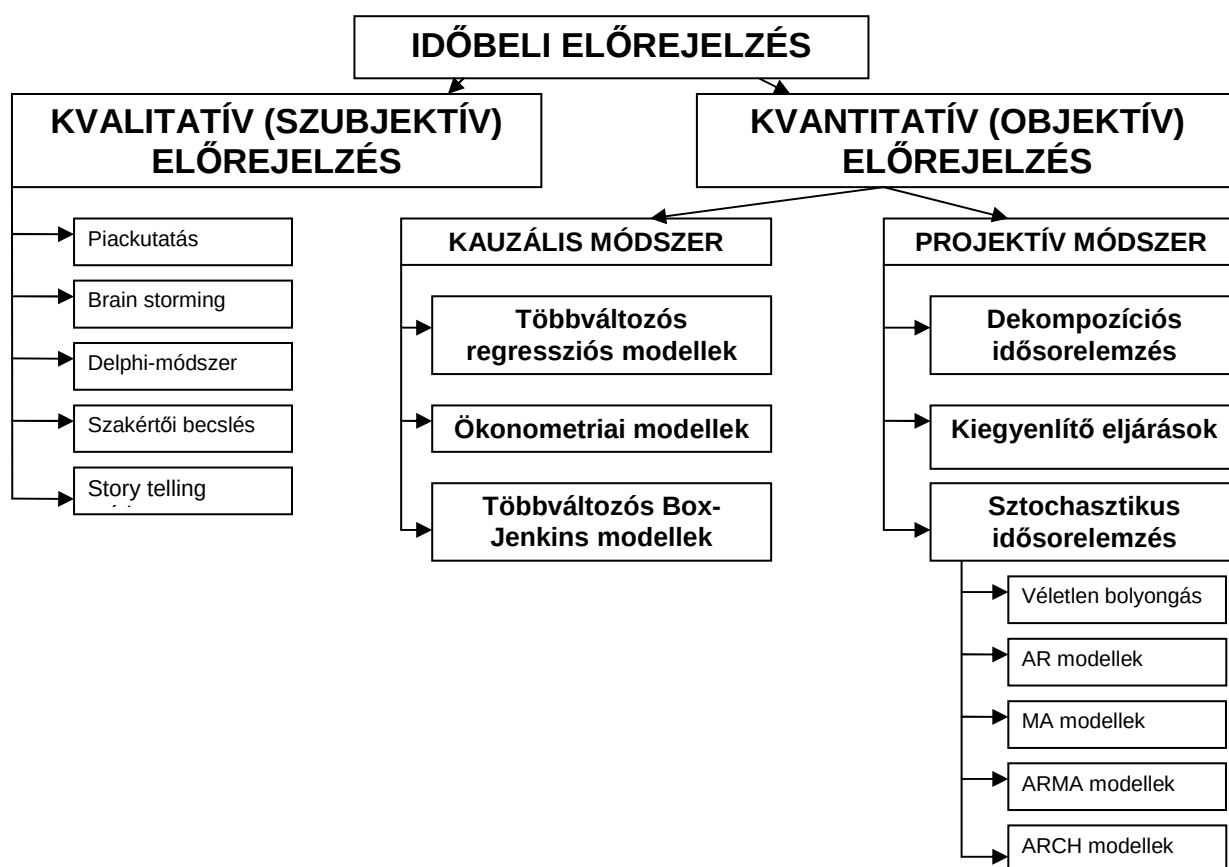
- *AARCH* (Augmented *ARCH*)
- *APARCH* (Asymmetric Power *ARCH*)
- *CGARCH* (Component *GARCH*)
- *EGARCH* (Exponential *GARCH*)
- *FIEGARCH* (Fractionally Integrated *EGARCH*)
- *FIGARCH* (Fractionally Integrated *GARCH*)
- *GARCH* (Generalized *ARCH*)
- *GARCH – M* (*GARCH* in Mean)
- *GED – GARCH* (Generalized Error Distribution *GARCH*)
- *GJR – GARCH* (Glosten, Jagannathan, Runkle *GARCH*)
- *IGARCH* (Integrated *GARCH*)
- *LARCH* (Linear *ARCH*)
- *MARCH* (Modified *ARCH* vagy Multiplicative *ARCH*)

¹¹ Bollerslev [5] 143 *ARCH* modellcsaládba tartozó modellt számolt össze

- *MEGARCH* (Matrix *EGARCH*)
- *NARCH* (Nonlinear *ARCH*)
- *NGARCH* (Nonlinear *GARCH*)
- *NAGARCH* (Nonlinear Asymmetric *GARCH*)
- *OGARCH* (Orthogonal *GARCH*)
- *SPARCH* (SemiParametric *ARCH*)
- *SQGARCH* (SQuare-Root *GARCH*)
- *SWARCH* (regime SWitching *ARCH*)
- *STARCH* (Structural *ARCH*)
- *TARCH* (Threshold *ARCH*)

Az időbeli előrejelzések neveinek egységesítése magával vonta egy egységes osztályozás kialakítását is. Ezen egységes osztályozási rendszer figyelhető meg a

1. ábraán.



1. ábra: Időbeli előrejelzések csoportosítása

2 TŐZSDEI ELEMZÉS

A tőzsde olyan szervezett intézmény, ahol meghatározott szabályok szerint, felügyelten, biztonságosan és átláthatóan bonyolódnak az ügyletek, a folyamatosan érkező információk alapján pedig a befektetők pillanatonként értékelik az értékpapírokat és egyéb tőzsdei termékeket (Rotyis [56]).

A különböző pénz- és tőkepiaci termékek értékelésének két módja van:

- Fundamentális elemzés
- Technikai elemzés

2.1 A fundamentális elemzés

Fundamentum = alap, latin eredetű kifejezés. A fundamentális elemzés a vizsgált termék alapjainak meghatározásával, elemzésével foglalkozik 3 különböző szinten:

- makroszint: nemzetgazdaságok vagy nemzetgazdaságok körét érinti,
- mezoszint: a kibocsátó vállalt szűkebb piaci környezetét érinti,
- mikroszint: magát a kibocsátó vállalatot érinti.

A makroszint a gazdasági helyzet elemzéséből a piaci kilátások, konjunktúrák, recessziók lehetőségének meghatározásából áll. Különösen nagy figyelmet kell fordítani a politikai helyzet elemzésére, hiszen például egy várható kedvező törvényi szabályozás előnyösen érintheti a vizsgálatunk tárgyát, míg egy megszorító intézkedés az egész gazdaságot nehéz helyzetbe hozhatja. A vizsgálatnak (amennyiben ez a vizsgált vállalat szempontjából releváns) ki kell terjednie az országhatárokon túlra is, hiszen ma már globális szinten kell gondolkodni.

A mezoszinten elsősorban versenytársainak a körét kell meghatározni, majd az ő helyzetüket, a vizsgált céghez való viszonyukat elemezni. Ezen a szinten kell foglalkozni a keresletet meghatározó fogyasztókkal, várakozásaikkal, elvárásaikkal is.

A mikroszint a vállalkozást elemzi, vizsgálja hatékonyságát, eredményességét erőforrásainak kihasználtságát és innovációit. Különböző mutatószámok alapján komplett pénzügyi elemzéseket végeznek feltárva a vizsgált vállalat múltját, jelenét és remélhetőleg bepillantanak a jövőjébe is.

A fundamentális elemzés célja a vizsgált cég belső értékének meghatározása. Amennyiben ez az érték a cég termékének piaci ára alatt van, az azt jelenti, hogy az árú felülértékelt. Ilyenkor nagy valószínűséggel a kiválasztott instrumentum ára csökkenni fog, hogy a valódi értékét megközelítse. Amennyiben viszont a cég belső értéke magasabb, mint a termék piaci ára, azaz a termék alulértékelt, akkor várható az árak felé mozdulás.

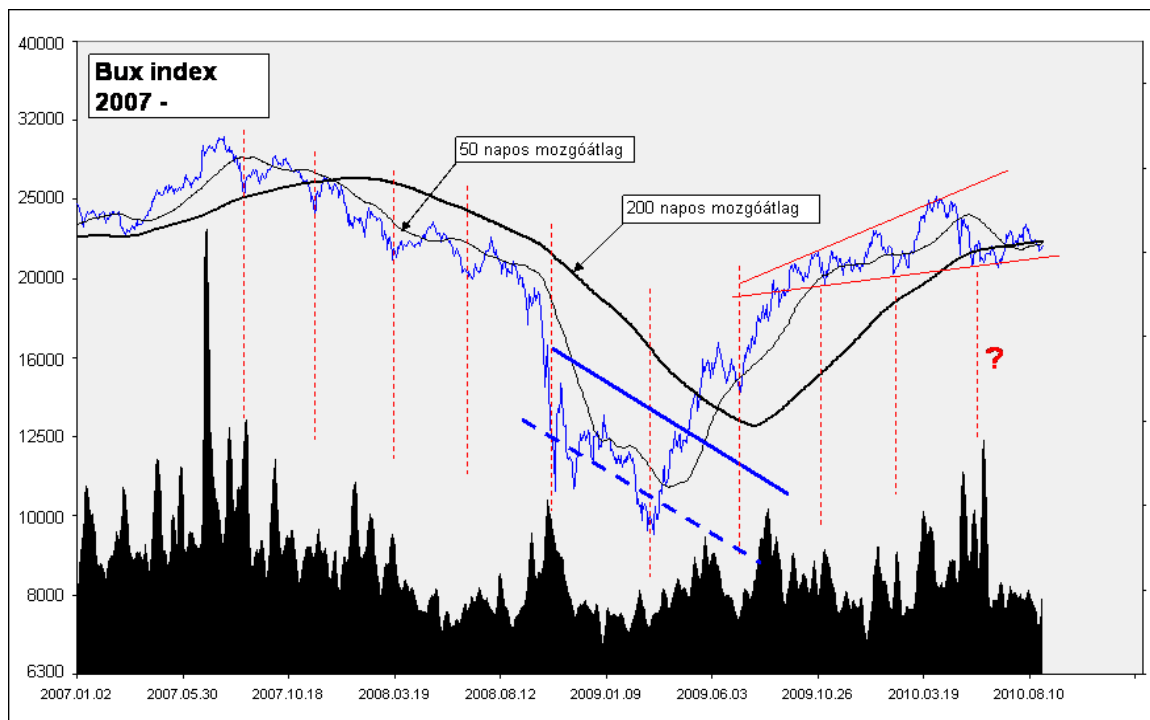
A fundamentális elemzés segítségével alaposan megismerve az érintett piac jellemzőit, megalapozott döntést tudunk hozni, ám ez nem mindig elég. Ahhoz, hogy döntésünk által valóban sikeres tranzakciót köthessünk, a piacnak úgy kell viselkednie, ahogy azt elvártuk tőle.

2.2 Technikai elemzés

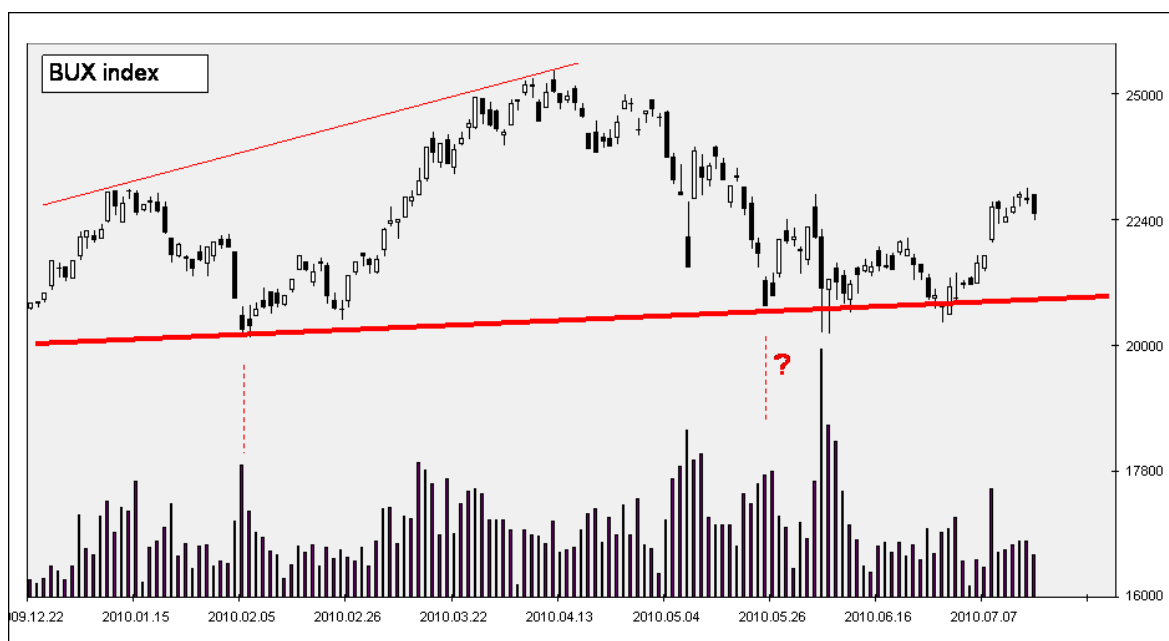
A fundamentális elemzés nagy hátulütője, hogy megalapozott döntéshez a piac elmélyült ismeretére van szükség. Ha valakinek nincs ideje, kedve ezzel „bíbelődni”, ám mégis szeretné a kiválasztott tőzsdei terméket megismerni a befektetés előtt, akkor kézenfekvő döntés a technikai elemzés eszköztárának bevetése.

A technikai elemzést készítőket chartistáknak szokták hívni tőzsdés körökben. A név onnan ered, hogy ők ábrákat (chart) készítenek és ezeket elemezve próbálják döntéseiket meghozni. Az ábrák készítésekor két lehetőség van. Készíthető:

- vonaldiagram, amiről ellenzői azt állítják, hogy az információk nagy részét elfedi, miután csak az adott napi, heti záró-/nyitó-/maximum-/minimum árakat ábrázolja (2. ábra),
- japán gyertya diagram, mely egy adott napon történt valamennyi fontos eseményt megmutatja számokban, azaz a záró-, nyitó-, maximum-, minimum árakat is tartalmazza szemléletes formában (3. ábra).



2. ábra: A BUX index alakulásának vonaldiagramja 2007. január 2. - 2010. augusztus 10. között
 Forrás: www.tapzor.hu



3. ábra: A BUX index alakulásának japán gyertya diagramja 2009. december 22. – 2010. július 15. között
 Forrás: www.tapzor.hu

A két diagram közül mindenki a neki tetszőt választhatja, ám azt érdemes tudni, hogy az elemezni kívánt időszak hossza befolyásolja az ideális választást. Ha valaki rövid időszakot kíván csak vizsgálni, akkor a gyertya diagram sok hasznos információval

szolgálhat. Néhány hónapnál hosszabb időtáv esetén már technikai nehézségekbe ütközik az ábrázolás, ilyenkor célszerűbb a vonaldiagramot választani.

A diagramok az egyszerű felrajzolásukkal sok mindent elárulnak, ám a hatékony kereskedéshez ennél többre van szükség. Ezért fejlesztették ki a különböző indikátorokat.

A technikai elemzés eszköztárát elsajátítva, némi gyakorlattal képesek lehetünk egyszerre több tőzsdei terméket (akár több különböző piacon) figyelemmel kísérni.

A grafikonos technikáknak az alapfeltételezése az, hogy a történelmi részvénytrendek ismétlődnek, így felhasználhatóak előrejelzéshez (Hornstein [28]). Erre az alapfeltételezésre építem én is dolgozatomat, s ezért próbálok meg egy a múltat minél jobban leíró modellt felépíteni.

3 RAX

Budapesti Értéktőzsde Zártkörűen Működő Részvénytársaság, Budapesti Értéktőzsde Zrt., Budapesti Értéktőzsde, BÉT, A Tőzsde. Ezek mind ugyanannak a gazdasági társaságnak a különböző megnevezései. A rendszerváltás után 1990. június 21-én nyitotta meg újra kapuit hazánkban, Budapesten a tőzsde.

„A Budapesti Értéktőzsde Zrt. legfontosabb feladata, hogy átlátható és likvid piacot biztosítson a Magyarországon és a külföldön kibocsátott értékpapírok számára. A hazai pénz- és tőkepiac központi szereplőjeként a Tőzsde forrásbevonási lehetőséget nyújt a gazdasági élet szereplőinek, egyúttal hatékony befektetési lehetőségeket biztosít a befektetők számára. A kereslet és kínálat koncentrációjával nyilvános információt biztosít a kereskedett termékek áralakulásáról” (BÉT honlap).

A világon minden tőzsdén számolnak saját indexet, indexeket. Ezek a mutatók azzal a céllal jöttek létre, hogy a tőzsde átlagos hangulatát, tendenciáját a piaci szereplők számára közérthető módon megjelenítsék. Vagyis az egyes vállalatok, befektetések értékének mérésén keresztül, a tőzsdeindex segítségével összképet kapunk a gazdaság állapotáról, a befektetők várakozásairól. A Budapesti Értéktőzsdén számított indexek közül a legismertebb a BUX, a BÉT hivatalos részvényindexe. A kis és közepes kapitalizációjú részvények indexe a BUMIX. A befektetési alapok számára jelentős index a RAX.

Tanulmányomban a RAX hazai indexet, annak időbeli alakulását vizsgálom, és próbálok meg a jövőbeli értékére vonatkozóan becsléseket adni. Azért nem a BUX-ot választottam, mert azt már sokan, sok szempontból elemezték, míg a RAX a statisztikusok és más elemzők „mostohagyermekének” tűnik.

Miért lehet érdekes egy „kisember” számára a RAX? Mert az a Befektetési Alapkezelők és Vagyonkezelő Magyarországi Szövetsége (BAMOSZ) által kifejlesztett index, mely a befektetési alapok számára benchmarkként¹² szolgálhat.

Amikor az ember olyan szerencsés helyzetben van, hogy a mindennapi megélhetéshez szükséges pénzén felül még megtakarítása is képződik, akkor először is el kell döntenie, mit tegyen a pénzével. Tarthatja a párnája alatt. Ám ez nem túl biztonságos és ráadásul nem is hoz semmilyen hasznot sem. Beteheti a bankba a számlájára. Ha ez egy egyszerű folyószámla, akkor bár a pénze biztonságban van¹³, viszont ezért cserébe csak igen kis hozamot biztosít. Annak, aki hajlandó némi kockázatot is vállalni, hogy ezért nagyobb hozamot realizáljon, a legmegfelelőbb hely a tőzsde. Ezzel csupán az a gond, hogy a legtöbb embert nem érti, vagy ha érti is nem tudja, nem akarja követni a tőzsde működését napi szinten. Nos, az ilyen embereknek lehet egy kézenfekvő megoldás a befektetési alapba történő investálás.

A befektetési alapok a kockázatot megosztják az egyes befektetési típusok között, ami egy kisbefektetőnek rendkívül idő-és költség-igényes lenne. Ráadásul az alapok által összegyűjtött vagyontömeg diverzifikált befektetése miatt biztonságosabb lesz a befektetés. Ahhoz, hogy ez a befektetés valóban biztonságos legyen, szükség van az alapok működésének törvényi szabályozására.

A tőkepiacról szóló 2001. évi CXX. törvény szabályozza többek között a Magyar Köztársaság területén székhellyel rendelkező befektetési alapkezelő külföldön alapított fióktelepe által végzett befektetési alapkezelési tevékenységet, a Magyar Köztársaság területén végzett befektetési alapkezelési tevékenységet és a Magyar Köztársaság területén székhellyel rendelkező befektetési alapkezelő határon át történő szolgáltatás nyújtását.

¹² Benchmark: olyan viszonyítási alapként használt irányadó hozam vagy piaci index, amelyhez egy portfólió vagy befektetési alap teljesítményét mérik.

¹³ Az Országos Betétbiztosítási Alap (OBA) 50.000 euró/ügyfél értékig biztosítja a visszafizetést a bank fizetéseképtelensége esetén.

A RAX, hivatalos nevén BAMOSZ Részvény Befektetési Alap Portfólió Index, egy 1 milliárd forint értékű portfóliót modellez úgy, hogy szerkezete és „működése” hasonlítson a befektetési alapoknak a törvényben előírt összetételre. Ennek érdekében az indexkosárba 13 részvény kerül előre meghatározott arányban, melyek: 12,5%, 12,5%, 12,5%, 8,5%, 8%, 7,5%, 7%, 6,5%, 6%, 5,5%, 5%, 4,5%, 4%. Vagyis 125 mFt, 125 mFt, 125 mFt, 85 mFt, 80 mFt, 75 mFt, 70 mFt, 65 mFt, 60 mFt, 55 mFt, 50 mFt, 45 mFt és 40 mFt értékben. Kosárba az a tőzsdére bevezetett törzs- és elsőbbségi részvény kerülhet bele az évi két (március 31-i és szeptember 30-i) felülvizsgálatkor, amely az adott napon közvéleményhellyel korrigált kapitalizáció alapján felállított rangsor első 13 helyén szerepel. A kosár újraszámítására, azaz a bennlévő részvények mennyiségének újraszámítására minden hónap végén sor kerül.

Az index számításának módja:

$$RAX = K \times \frac{\sum_{i=1}^{13} p_{it} \cdot q_i \cdot D_i}{\sum_{i=1}^{13} p_{i0} \cdot q_i} \times 1000 \quad (3.1.)$$

ahol RAX az index értéke két tizedesre kerekítve,

i az indexben szereplő részvénytípus

p_{it} adott részvény t -dik napi zárás árfolyama

p_{i0} adott részvény indexbe kerülést megelőző zárás árfolyama

q_i adott részvényből az indexben kalkulált részvények száma

K korrekciós tényező (6 tizedes pontos), mely az index folytonosságát hivatott biztosítani

$$D_i = \frac{p_i(EX-1)_k}{p_i(EX-1)_k - d_{ik}} \times D_i(EX-1)_k \quad (3.2.)$$

6 tizedes pontos tényezőben, $1 \leq D \leq 2$

ahol E osztalékjogosultság napja

$(EX-1)_k$ az a nap, amikor i részvény a k -dik osztalékfizetést megelőzően a tőzsdei forgalomban utoljára forog osztalékszelvénnyel

$p_i(EX-1)_k$ adott részvénytársaság részvényeinek záró ára $(EX-1)_k$ napon

d_{ik} k -dik osztalékfizetéskor az i részvény egy egységére eső osztaléka

$D_i(EX-1)_k$ D tényező értéke k -dik osztalékfizetéskor $(EX-1)_k$ napon

A RAX értékét 1999. február 15. óta határozzák meg naponta egyszer, 16.30-kor. A bázisértéke 1998. január 7-én 1000 pont volt. Eddigi¹⁴ legmagasabb értéke 2146,21 pont volt mintegy három éve 2007. július 23-án.

¹⁴ 2010. július 31.

4 ALKALMAZOTT MÓDSZEREK

Dolgozatomban a hagyományos elemzésektől indulok el, s nézem meg, hogy azok mennyire megfelelőek a RAX idősorának jellemzésére. Eközben egy teljesen új matematikai eszközt is bevetek a lehető legjobb modell felépítésére. Majd a sorban az $ARIMA(q, d, p)$ modell követik. Az utolsónak végzendő vizsgálatok pedig az $ARCH$ modellelcsalád körében zajlanak.

4.1 Dekompozíció

A dekompozíciós modellek arra a feltevésre építenek, hogy az idősor négy elemből áll, melyeket egymás után le lehet választani, s a folyamat végén már csak a véletlen marad, ami nem tudja jelentősen befolyásolni az idősor értékét.

4.1.1 Trendszerűség

Ennek az első lépésnek az a lényege, hogy az idősorból a többi komponens hatását valahogyan kiszűrjük, az idősort „kisimítsuk”. A két lehetséges módszer, a mozgó átlagok módszere és az analitikus trendszerűség.

Ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy a tartós irányzatunkat valamilyen analitikusan leírható függvénnyel jól tudjuk közelíteni, akkor ennek a függvénynek az előállítását a trendszerűségnek.

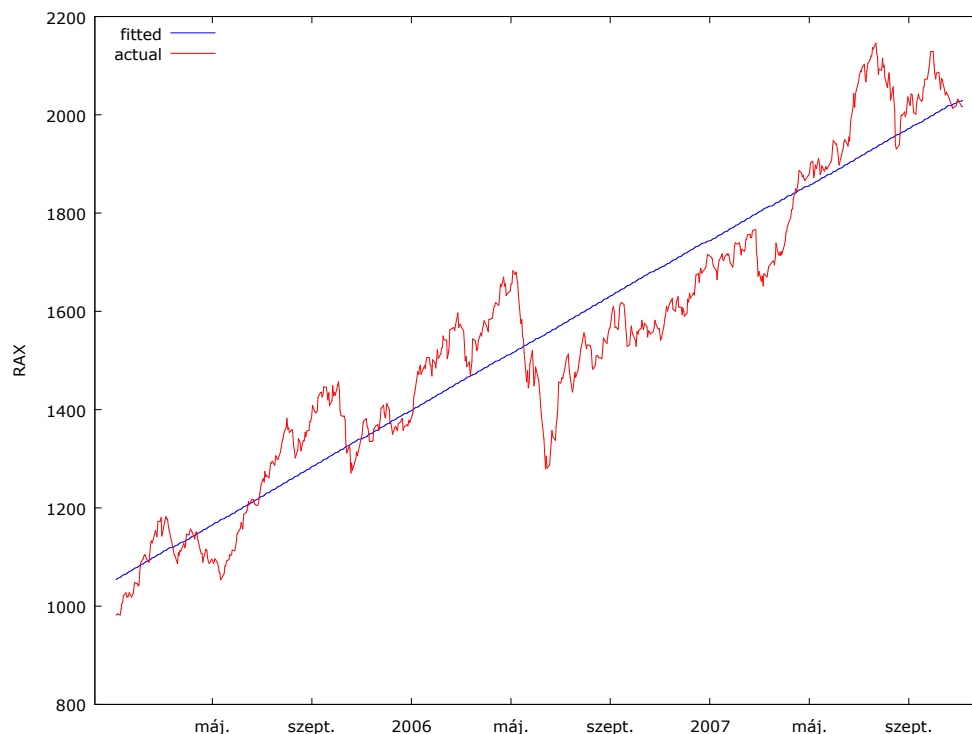
A felhasznált függvény alapvetően kétféle lehet: lineáris vagy nemlineáris, hogy melyiket választjuk, azt akkor tudjuk eldönteni, ha a megfigyelt adatokat egy megfelelő koordináta-rendszerben grafikusán ábrázoltuk.

A társadalmi-gazdasági jelenségek idősorait általában a lineáris függvény mellett az exponenciális, a logisztikus függvények, a hiperbola és a p -ed fokú polinom közelíti meg a legjobban. Mindegyik esetben más-más alapmodell állítható fel, amelyeket megoldva szintén meg tudjuk határozni a trendet.

Ramanathan [55] felsorol néhány általánosan alkalmazott trendformát a könyvében. Vizsgálataim során első lépésben ezeket fogom a trend kiszűrésére használni, ám a második lépésnél kiterjesztem a vizsgálatot egy különleges tulajdonságokkal bíró köbös polinomra, a spline-ra.

4.1.1.1 Lineáris trendszámítás

A lineáris trendet akkor alkalmazzuk, ha a grafikus ábránkon a szomszédos időszakok közötti változás abszolút mértéke bizonyos állandóságot mutat, a pontok „ránézésre” is egy egyeneshez esnek közel (4. ábra).



4. ábra: RAX idősora 2005. január 5. - 2007. november 6.

A lineáris trend alapmodellje:

$$\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t \quad (4.1.)$$

ahol $\hat{y}_t$ a t -dik elem trendértéke

t az időváltozók kifejező sorozata

β_0 a $t = 0$ időponthoz tartozó trendérték

β_1 a trendfüggvény meredeksége, azaz időegység alatt egy időszakra jutó átlagos növekedés mértéke

ε_t a t -dik időponthoz tartozó véletlen

Az alapmodellben 2 ismeretlen paraméter (β_0 és β_1) található, amelyek meghatározásának legismertebb és egyben legegyszerűbb módja a legkisebb négyzetek módszere¹⁵. Ezzel a módszerrel ugyanis az alapmodellben meglévő véletlen szerepét a minimálisra lehet csökkenteni és egy egyenletrendszert tudunk felírni, aminek a megoldásai a keresett ismeretlen paraméterek lesznek.

Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} n \cdot \beta_0 + \left(\sum t\right) \cdot \beta_1 &= \sum y_t \\ \left(\sum t\right) \cdot \beta_0 + \left(\sum t^2\right) \cdot \beta_1 &= \sum (t \cdot y_t) \quad (t = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.2.)$$

AZ OLS eredményeként kapott két paraméter ($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$) segítségével a trend felírható

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot t \quad (4.3.)$$

alakban, ahol a paraméterek értelmezhetőek. $\hat{\beta}_0$ a $t = 0$ időpontban mutatja az eredményváltozó értékét, míg $\hat{\beta}_1$ a t időegység alatti eredményváltozó változás értékét adja meg.

¹⁵ OLS-Ordinary Least Squares, azaz LNM-Legkisebb négyzetek módszere

4.1.1.2 Polinomiális trendek

p -ed fokú polinomok közül a másodfokút, azaz a parabolát ismerjük és használjuk a leginkább. Egy olyan idősor jellemzésére, mint amilyenek a gazdasági adatok, ennél magasabb fokszámú polinomiális trendet kell alkalmazni.

A polinomiális trendek alapmodellje:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t^2 + \dots + \beta_p \cdot t^p + \varepsilon_t \quad (4.4.)$$

Figyelni kell arra, hogy az ismeretlen paraméterek közvetlenül nem értelmezhetők. A fokszám növelésével a reziduális variancia csökken, illetve ha túl magas lesz a fokszám, akár véletlen ingadozás is beépülhet az idősorba.

4.1.1.3 Logisztikus trend

A logisztikus trendfüggvény, avagy S alakú görbe ábráján három jól elkülöníthető szakasz látható. Az első szakaszban a függvény értékei alacsonyak és csak lassan emelkednek. A második szakaszban gyors a növekedés. A harmadik szakaszban a növekedés lelassul, a függvény értékei egy állandó szinthez közelednek. A logisztikus trendet a demográfiában a népesség növekedésének leírására vagy egy új termék bevezetése esetén az eladás jellemzésére használják.

Alapmodelljében az OLS modellre logisztikus transzformációt alkalmazunk az eredményváltozóra, azaz:

$$\ln\left(\frac{y}{y^* - y}\right) \quad (4.5.)$$

ahol y^* a vizsgált változó aszimptotikus maximuma. Az eredményváltozó csak szigorúan pozitív lehet. A becült modellünk:

$$\hat{y}_t = \frac{k}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot t}} \quad (4.6.)$$

ahol k a telítődési szint, az az érték, amely felé az idősor értéke a harmadik szakaszban tart

$e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot t}$ az egyes időszakokhoz tartozó relatív telítetlenségi szint

4.1.1.4 Log-lin trend¹⁶

Az eredményváltozó transzformálásával kapott modell alapformája:

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t \quad (4.7.)$$

A modell szigorú kikötéssel él, mégpedig hogy a függő változó csak pozitív értékeket vehet fel ($y_t > 0$). Az egyenlet mindkét oldalának e alapú hatványát véve megkapjuk azt a formát, amelyből majd az előrejelzések elkészíthetők lesznek:

$$y_t = e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t} \quad (4.8.)$$

Akkor célszerű ezt a függvényformát választani, ha egy konstans ütemben növekvő eredményváltozónk van.

4.1.1.5 Log-log trend

Az eredményváltozó mellett ennél a modellnél már a magyarázóváltozót is transzformálni kell. Az alapmodell:

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln t + \varepsilon_t \quad (4.9.)$$

A nemlineáris függvényeket segít linearizálni, ezért is lehet a termelési és keresleti függvények tipikus formája.

¹⁶ A modellt féllogaritmikus modell néven is említi a szakirodalom.

4.1.1.6 A reziduális változóra vonatkozó feltételek tesztelése

Miután ellenőriztük, hogy a becsült összefüggésünk mennyire jó, célszerű megvizsgálni a számítások kezdetén megfogalmazott feltételeket. A számítás kritériumai között szerepel négy, amelyek a maradékváltozóra vonatkoznak. Ezek meglétének ellenőrzése diagnosztikai tesztek segítségével történik. Kivéve az első feltételt, amely a hibatagok várható értékére vonatkozik, ami OLS becslés estében mindig teljesül, így nem szokás ellenőrizni. A megvizsgálandó három előfeltétel tehát:

1. autokorreláció
2. heteroszkedaszticitás
3. maradékok normális eloszlása

1. Autokorreláció

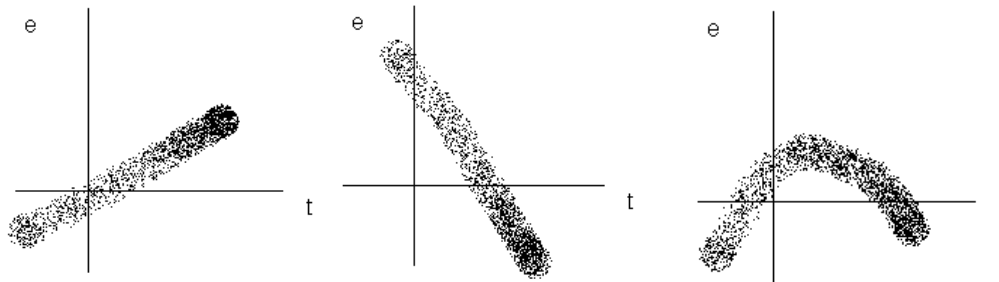
Amikor az idősor egymást követő maradékai között korreláció van, akkor autokorrelációról beszélünk. Ez a kapcsolat fennállhat az egymást követő tagok között, és ekkor elsőrendű autokorrelációról beszélünk. Létezik ezen kívül másod-, harmad-, p -ed fokú autokorreláció, ahol a reziduum és az azt követő második, harmadik, p -dik reziduum között áll fenn sztochasztikus kapcsolat.

Az autokorreláció kialakulásának több oka lehet. Legtöbbször a függvénytípus nem megfelelő kiválasztása vagy a szükséges magyarázóváltozó szerepetetésének hiánya okozza¹⁷.

Az autokorreláció megléte már egy olyan egyszerű ábrán is jól látszik, ahol a maradékok értékeit tüntetjük fel (lásd 5. ábra). Természetesen léteznek kvantitatív tesztelési eljárások. Ezek közül a leginkább használt a Durbin-Watson próba [19] [20]. A próba azonban csak az elsőrendű autokorreláció tesztelésére alkalmas. A magasabb rendű autokorreláció tesztelésére alkalmasabb lehet az LM-próba, illetve az ezen alapuló Breusch–Godfrey-próba [11] [24]. A Box-Jenkins modellek harmadik lépése a diagnosztikai ellenőrzés,

¹⁷ Az autokorrelációnak Kőrösi et. al. [36] ennél több okot sorol fel.

mely során az autokorrelációt is ellenőrizni kell. Ehhez a lépéshez dolgozták ki a Box-Pierce tesztet, melynek ma inkább egy továbbfejlesztett változatát, a Ljung-Box próbát alkalmazzák a statisztikusok, ha kifejezetten az autokorreláció tesztelése a cél, hiszen itt a nullhipotézis szerint a maradék tag WN. (A portmanteau próbákról részletesebben az 1.3.3. fejezetben írtam.)



5. ábra: Tipikus autokorrelációs esetek

A Durbin-Watson próba menete:

1. Hipotézisek felállítása: $H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$

ahol a t -dik megfigyelésből kiindulva $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$.

Autokorreláció fennállása esetén $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t$, azaz a reziduum értéke az előző reziduum és egy véletlen változó (η_t) függvénye.

A nullhipotézis tehát azt jelenti, hogy két egymást követő maradék között nincs kapcsolat, vagyis az induló regressziós feltétel teljesül.

2. Mintánk alapján a próbastatisztika értékének kiszámítása:

A regressziós maradékból képzett Durbin-Watson statisztika

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2} \quad (4.10.)$$

értéke 0 és 4 közé esik, még hozzá úgy hogy az eloszlás a $d = 2$ pontra szimmetrikus.

3. Döntés a hipotézisekről:

Ennél a tesztnél egy alsó (d_L) és egy felső (d_U) kritikus értéket határoznak meg, majd azok ismeretében a döntési szabály meglehetősen bonyolult:

- Ha d értéke a $0 - d_L$ tartományba esik, pozitív autokorrelációról beszélünk
- Ha d értéke a $d_L - d_U$ tartományba esik, nem tudunk döntést hozni (semleges zóna)
- Ha d értéke a $d_U - (4 - d_U)$ tartományba esik, nincs autokorreláció
- Ha d értéke a $(4 - d_U) - (4 - d_L)$ tartományba esik, nem tudunk döntést hozni (semleges zóna)
- Ha d értéke a $(4 - d_L) - 4$ tartományba esik, negatív autokorrelációról beszélünk

A Breusch–Godfrey-próba menete

1. Hipotézisek felállítása: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$

$H_1 : \text{legalább egy } \rho_i \neq 0$

ahol a t -dik megfigyelésből kiindulva

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t \quad (4.11.)$$

autokorreláció fennállása esetén

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + \eta_t \quad (4.12.)$$

azaz a reziduum értéke az előző reziduumok és egy véletlen változó (η_t) függvénye.

A nullhipotézis tehát azt jelenti, hogy egymást követő maradékok között nincs kapcsolat, azaz lineárisan függetlenek.

2. Mintánk alapján a próbastatisztika értékének kiszámítása:

A regressziós maradékból képzett Breusch–Godfrey - próba statisztikája

$$n \cdot R^2 \quad (4.13.)$$

azaz a minta elemszám és a korigálatlan R^2 szorzata, ami egy p szabadságfokú χ_p^2 eloszlást követ.

3. Döntés a hipotézisekről:

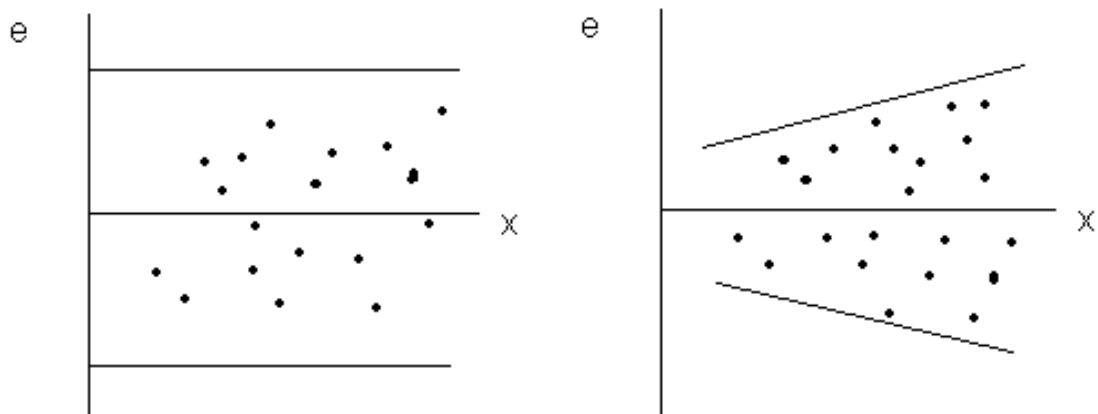
A kritikus érték meghatározása után amennyiben a számított statisztika nagyobb, mint a kritikus ($n \cdot R^2 > \chi_p^2$), úgy az alaphipotézist elutasítjuk, azaz létezik valamilyen fokú autokorreláció a hibatagok között.

Autokorreláció fennállása esetén az OLS becslés elveszíti BLUE-ságát, így a közelítő értékek nem lesznek hatásosak. Szintén gondot jelent ilyenkor, hogy a paraméterek szórásnégyzetei torzítottak, s így az illeszkedés jósági foka jelentősen fölé becsülhető.

Az autokorrelációs probléma legegyszerűbben úgy szüntethető meg, ha egy másik modellformát választunk, vagy megvizsgáljuk, hogy mely fontos változót hagytuk ki a modellből, ami így nem lett megfelelő.

2. Heteroszkedaszticitás

Ha a maradékváltozó különböző x_i értékekhez tartozó varianciája állandó, akkor homoszkedaszticitásról beszélünk. Ezen feltétel meglétét könnyen ellenőrizhetjük, ha ábrázoljuk a hibatenyezőt. A 6. ábra első fele egy olyan esetet mutat, ahol teljesül a feltétel, míg az ábra második felén jól látható, hogy x értékének növekedésével a hibatenyező értéke is nő, azaz heteroszkedaszticitás esete áll fenn.



6. ábra: Homoszkedaszticitás és heteroszkedaszticitás

A homoszkedaszticitás tesztelésére alkalmas eljárások közül az LM próbák, azon belül is a Breusch-Pagan próba [10] a leginkább használt, mert általánosan alkalmazható. A próba hátulütője hogy feltételezi a homoszkedaszticitásra vonatkozó előzetes ismeretek, előfeltevések meglétét. Ezt a hibát küszöböli ki a White próba [60], mely szintén nagymintás LM próba.

A Breusch-Pagan próba

A próba során a modellünk a következő formában írható fel:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t \quad (4.14.)$$

ahol $\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 | x_t)$ az eltérésváltozó szórásnégyzete:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \alpha_2 z_{t2} + \dots + \alpha_p z_{tp} \quad (4.15.)$$

ahol z_{ti} ismert adatokkal rendelkező i változó t időpontbeli megfigyelt értéke.

1. Hipotézisek felállítása: $H_0 : \alpha_i = 0$ minden $i = 2, 3, \dots, p$

H_1 : legalább egy $\alpha_i \neq 0$

Amennyiben a számított érték az elfogadási tartományba esik, a homoszkedaszticitás feltétele megvalósul. Amikor azonban a tartományon kívül, az elutasítási tartományba esik, heteroszkedaszticitás esete áll fenn.

2. Mintánk alapján a próbastatisztika értékének kiszámítása:

$$LM = \frac{1}{2} SSR_{\sigma^2} \quad (4.16.)$$

azaz a σ^2 -re vonatkozó segédregresszió regressziós eltérés négyzetösszegének a fele, amely $p-1$ szabadságfokú χ_{p-1}^2 eloszlást követ.

3. Döntés a hipotézisekről:

A χ_{p-1}^2 kritikus értékének meghatározása után akkor tudjuk a nullhipotézist elutasítani, ha a számított statisztikánk értéke magasabb a táblázatból kikeresett értéknél ($LM > \chi_{p-1}^2$).

White próba

A próba során azt feltételezzük, hogy $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 f(x_i)$, ahol x_i az ismeretlen változó. A White próba keretében az ε_i^2 maradékváltozó négyzetére írunk fel egy segédregressziót, melyben a reziduumokat egy konstanssal, az összes magyarázóváltozóval, azok négyzeteivel és a magyarázóváltozók keresztszorzataival magyarázzuk. Összesen p darab magyarázóváltozónk van.

Ha tehát csupán két változóval magyaráztuk meg az eredményt: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \varepsilon_t$, akkor 3 (c, x, x^2) , ha 3-mal $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$, akkor 6 $(c, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2)$ ha 4-el $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t$, akkor 10 $(c, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$ változóval tudjuk a ε_t^2 -t magyarázni¹⁸.

A White próba elvégezhető úgy is, ha csupán a változók négyzeteit vesszük, a keresztszorzatokat nem.

A próba menete megegyezik a korábban bemutatott Breusch-Pagan próbáéval, a különbség csupán a tesztstatistikában van, amely itt

$$LM = nR^2 \quad (4.17.)$$

vagyis a minta elemszám és a segédregresszió korrigálatlan R^2 -ének szorzata, ami egy p szabadságfokú χ_p^2 eloszlást követ.

A homoszkedaszticitás hiánya azért jelent gondot egy elemzés során, mert az alapösszefüggésünket nem lehet OLS módszerrel becsülni, hiszen az így már nem hatásos. Az ilyenkor alkalmazható becslési eljárás a WLS¹⁹, azaz a súlyozott legkisebb négyzetek módszere és a maximum likelihood (ML) becslés.

¹⁸ Általános szabály alapján, ha a konstanssal együtt k számú magyarázó változóval magyarázzuk az y -t, akkor $k \cdot (k + 1) / 2$ számú magyarázóváltozó (konstanssal együtt!) szükséges a segédregresszióba.

¹⁹ Weighted Least Squares

Heteroszkedaszticitás esetén szintén problémát jelent, hogy a varianciákra vonatkozó becslések nem torzítatlanok, s így a szokásos szignifikanciákkal nem tudunk dolgozni.

3. A hibatényező normalitása

A maradék eloszlásáról feltételezzük, hogy normális. Ennek teljesülését legkönnyebben normál valószínűségi ábra alapján ellenőrizhetjük. Az ábrán a reziduumokat a normális eloszlás esetén várható értékük (e_i^*) függvényében ábrázoljuk.

A várható érték

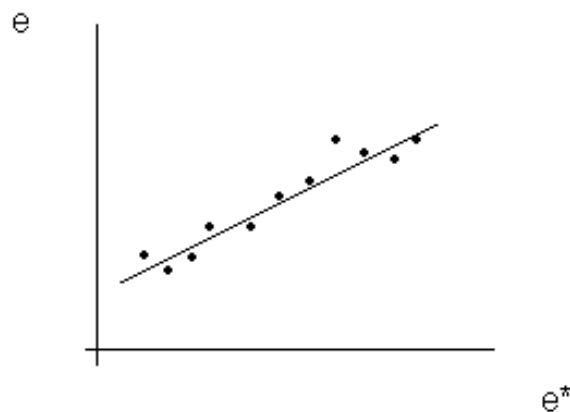
$$e_i^* = s_e \left[z \left(\frac{i - 0,375}{n + 0,25} \right) \right] \quad (4.18.)$$

ahol: i - a reziduum sorszáma

$z \left(\frac{i - 0,375}{n + 0,25} \right)$ - normális eloszlás értéke $\left(\frac{i - 0,375}{n + 0,25} \right)$ helyen

s_e - a reziduális szórás.

Amennyiben az így kapott ábra közel lineáris (7. ábra), azt mondhatjuk, hogy a normalitás feltétele teljesül. Ugyanerre a célra alkalmazható a Q-Q (quantile-quantile) plot, mely sokkal elterjedtebb²⁰.



7. ábra: Normál valószínűségi ábra

²⁰ Elsősorban annak köszönhetően, hogy a statisztikai programcsomagok beépített opcióként kínálják.

A normális eloszlást másik grafikus eszközzel is szemléletesen lehet megmutatni. Ez a maradékok hisztogramja. Normális eloszlásnál a hisztogram haranggörbe alakú.

Amennyiben a vizuális élményt szeretnénk számokkal is alátámasztani, akkor a legegyszerűbb megoldás egy illeszkedésvizsgálat elvégzése, ahol a H_0 hipotézisünk szerint a vizsgált minta normális eloszlást követ, míg az ellenhipotézis szerint nem.

4.1.1.7 Mozgóátlagolás

A trendet a megfigyelt idősor értékeinek átlagolásával kell előállítani abban az esetben, ha feltételezzük a tartós irányzat létét, de nincs kellő ismeretünk a vizsgált folyamatról vagy nem tudunk analitikusan leírható függvényt meghatározni a közép- vagy hosszú távú ciklusok zavaró hatása miatt.

A módszer lényege, hogy az idősor t -dik eleméhez úgy tudunk trendértéket rendelni, hogy annak bizonyos környezetében lévő elemeket átlagoljuk. Legegyszerűbb esetben 3 tagú mozgóátlagot tudunk képezni. Ekkor a t -dik elemet megelőző és az azt követő elemek segítségével készíthetjük el a trendértéket. Azonban az idősor első és utolsó eleméhez nem lehet értéket megadni, hiszen akkor nincs megelőző/követő elem.

A gyakorlatban általában nem 3 tagú trendet számítunk, hanem m tagút. Attól függően, hogy az m páros, vagy páratlan, szintén két eset lehetséges:

1. m páratlan

Ekkor m felírható ilyen alakban: $m = 2k + 1$

A trend általános képlete:
$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-k} + y_{t-k+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+k}}{2k + 1} \quad (4.19.)$$

ahol $\hat{y}_t$ a t -dik elem trendértéke

y_t a t -dik elem

$t - k \geq 1$ és $t + k \leq n$ kell hogy érvényesüljön

Tulajdonképpen ennek egyik speciális esete a 3 tagú trend, ami tehát a képletet követve így

$$\text{néz ki: } \hat{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

2. *m* páros

$$\text{Ekkor } m = 2k \text{ és } \hat{y}_t = \frac{\frac{1}{2}y_{t-k} + y_{t-k+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+k-1} + \frac{1}{2}y_{t+k}}{2k}, \text{ ahol ugyanannak a}$$

feltételnek kell érvényesülnie, mint az 1. esetben, azaz $t - k \geq 1$ és $t + k \leq n$.

Ebben a két esetben egy dolog ugyanaz, még hozzá, hogy az első és az utolsó k elemre nem lehet mozgó trendet meghatározni.

A mozgóátlagolás tagszámát annak függvényében kell megadni, hogy a szezonális van-e a vizsgált idősorban. Ha ugyanis feltételezhető, hogy van, akkor célszerű m -et úgy megadni, hogy a periódus egész számú többszöröse legyen. Ekkor a mozgóátlagolás kisimítja a periódust. Ellenkező esetben pedig vagy nem megfelelően simítana, vagy éppen újabb periódust generálna.

4.1.2 Konjunktúra hatás kiszűrése

A szabálytalan közép- vagy hosszú távú ciklus meghatározásának is két módja van, mint ahogyan a trendet is két úton lehetett kiszámítani. Mivel a ciklust az analitikus- és a mozgóátlagolású trend összevetésével lehet meghatározni, így a két módszer abban különbözik, hogy melyiket végzem el először.

Abban az esetben, ha a megfigyelt idősor trendjét mozgóátlagolással határozzuk meg, akkor a kapott trendértékekből kiindulva analitikus trendet kell számítani. Ebben az esetben a ciklus a két trend különbsége lesz.

A másik eset, amikor az analitikus trend számításával indítjuk az idősor elemzését. Ilyenkor az illesztett trendet levonva az idősor elemeiből megkapjuk a ciklus, a

szezonalitás és a véletlen együttes értékét. Ebből mozgóátlagolás segítségével határozható aztán meg a keresett tényező, azaz a ciklus.

A két módszer bár nem egyforma, de egymáshoz igen közelálló eredményeket ad. Éppen ezért bármelyik használható.

4.1.3 Szezonalitás kiszűrése

A trend és ciklus értékének meghatározása még nem elég egy megbízható előrejelzés készítéséhez. Feltétlenül ellenőrizni kell, hogy nem maradt-e az idősorban még olyan elem, ami nem csak a véletlennel magyarázható, azaz nem maradt-e szezon hatás.

Ahhoz, hogy a szezonalitást meg tudjam határozni, ki kellett szűrni a többi komponens hatását. Ezt úgy hajtottam végre, hogy az idősort megtisztítottam a trend és a ciklus hatásától, vagyis kivontam azokat az idősorból (ezzel létrehozva *az egyedi szezonális eltéréseket*). A maradék azonban még tartalmazta a véletlent. Ezt a komponenst úgy tudtam kiszűrni, hogy a különbségeket a megfelelő szezonokra nézve a periódusok (i) szerint átlagoltam. Azonban ekkor szükség volt még egy korrekcióra, és így maradt meg végül az, ami megmutatja, hogy a szezonális hatás miatt az adott időszakban mennyivel tér el az idősor adata az alapirányzatnak megfelelő értéktől.

$$\begin{aligned}
 y_{ij} - \hat{y}_{ij} - c_{ij} &= s_j + \varepsilon_{ij} = y_{ij}^* \\
 \hat{s}_j &= \frac{\sum_{i=1}^n y_{ij}^*}{n} \\
 s_{\text{kor}} &= \hat{s}_j - \frac{\sum_{j=1}^m \hat{s}_j}{m}
 \end{aligned}
 \tag{4.20.}$$

A szezonális eltérést nemcsak hónapokra készítjük el, hanem negyedévekre is, hiszen a tőzsdék életében egy-egy gazdasági negyedév lezárása jelentős változásokat hozhat.

Egy sokkal elegánsabb megoldás alkalmazható a szezonális eltérés meghatározására. Ebben a módszerben egy többváltozós regressziós függvénnyel egyszerre lehet a lineáris alapirányzatot és a szezonalitást megkapni.

A trendet és szezonalitást meghatározó regressziófüggvény:

$$\hat{y}_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 \quad (4.21.)$$

ahol α_1 azt mutatja, hogy a második negyedévben mennyivel volt nagyobb/kisebb a szezonhatás, mint az elsőben

α_2 azt mutatja, hogy a harmadik negyedévben mennyivel volt nagyobb/kisebb a szezonhatás, mint az elsőben

α_3 azt mutatja, hogy a negyedik negyedévben mennyivel volt nagyobb/kisebb a szezonhatás, mint az elsőben

Z_1 értéke az egyes negyedévekben: 0 1 0 0

Z_2 értéke az egyes negyedévekben: 0 0 1 0

Z_3 értéke az egyes negyedévekben: 0 0 0 1

A képletből a negyedévek szezonálisításának értéke egyszerűen határozható meg:

I. negyedév szezonális eltérése: s_1

II. negyedév szezonális eltérése: $s_2 = s_1 + \alpha_1$

III. negyedév szezonális eltérése: $s_3 = s_1 + \alpha_2$

IV. negyedév szezonális eltérése: $s_4 = s_1 + \alpha_3$

Ebből tehát az I. negyedév könnyen megadható, ha a regressziós függvényt már meghatároztuk, hiszen $s_1 = \frac{-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4}$.

4.1.4 Spline

A trendszámítás alapproblémája, hogy ismert értékekhez, illetve (azokat ábrázolva) pontokhoz keresünk egy olyan görbét, amely azokat megfelelően jól közelíti. A matematikán belül ennek a problémának egy lehetséges megoldására az approximációt alkalmazzák.

A klasszikus interpolációs elmélet Lagrange nevéhez fűződik. A probléma tehát, amelyre három megoldási módot is adtak azóta, a következő: keresem azt az n -ed fokú polinomot, amely minden megfigyelt értéken éppen keresztül megy, azaz illeszkedik.

Abban az esetben, ha a megfigyelés csupán két értékből áll, akkor a keresett polinom egy egyenes, vagyis egy első-fokú polinom.

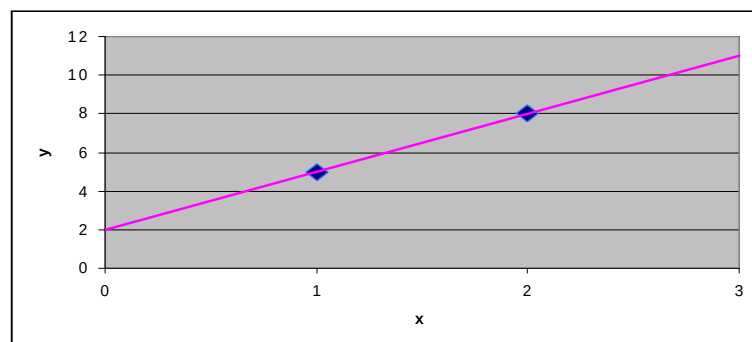
A polinom általános formája:

$$y = m \cdot x + b \quad (4.22.)$$

ahol két ismeretlen van: m , amely az egyenes meredekségét adja meg,

b , amely pedig azt mutatja meg, hogy az egyenes milyen magasságban metszi az y tengelyt.

A két ismeretlen miatt ezt az egyenest 2 egyenlet megoldásával meghatározható.

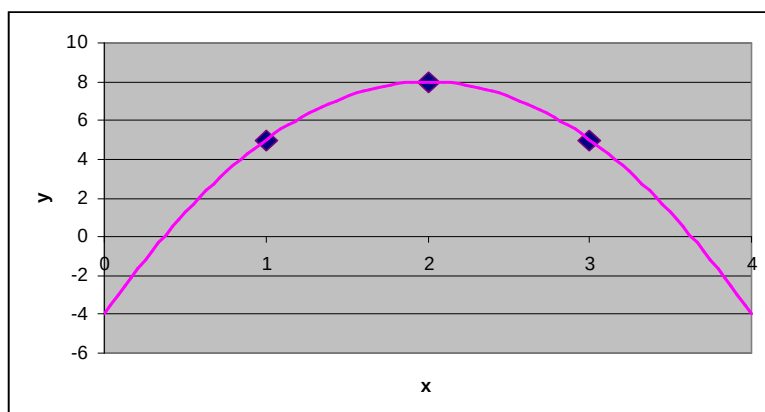


8. ábra: Két megfigyelésre illeszkedő polinom

Ha a megfigyelések száma 3, akkor egy parabolával lehet ezeket az ábrában összekötni. A parabola egy másod-fokú polinom, melynek általános formája:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (4.23.)$$

Látható, hogy ebben az esetben már három ismeretlen (a, b, c) van, ami tehát három egyenletből álló egyenletrendszer segítségével megadható.

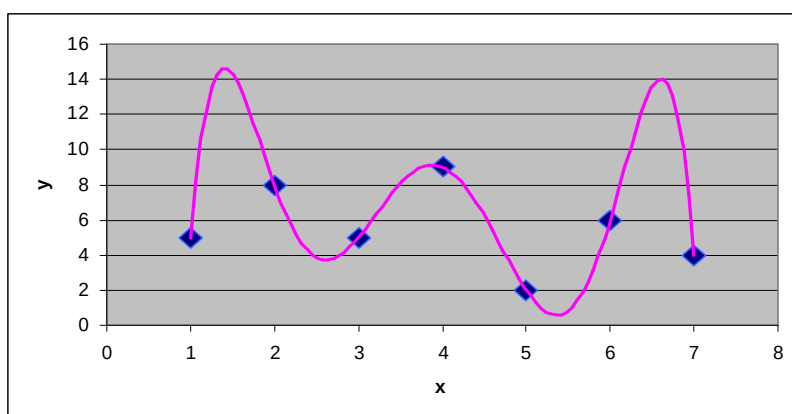


9. ábra: Három megfigyelés és a polinomja

Ugyanezt a logikát követve: ha $n+1$ pont, megfigyelés lenne, akkor arra egy n -ed fokú polinom illeszthető. A polinom általános alakja ebben az esetben:

$$y(x) = y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (4.24.)$$

Jól látható, hogy az n -ed fokú polinomnak $n+1$ darab ismeretlenje van, amelyet $n+1$ darab egyenletből álló egyenletrendszer oldana meg. Ez már elég nagy feladat.



10. ábra: Több elemű megfigyelés és polinomja

Ennek a bonyolult egyenletrendszernek a megoldására adtak meg a matematikusok három megoldást.

1. „Egyszerű” megoldás

Sajnos ennek a módszernek csak a neve egyszerű. Ugyanis egy ilyen lineáris egyenletrendszert eredményez:

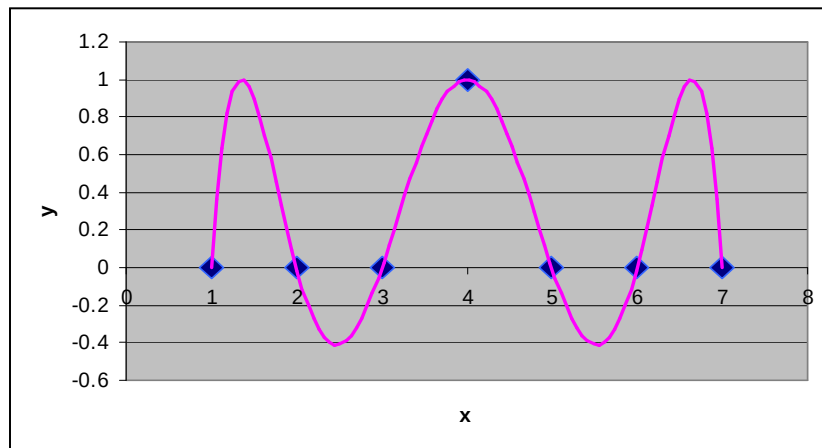
$$\begin{aligned}
y(x_0) = y_0 &= a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0 \\
y(x_1) = y_1 &= a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} \cdot x_1^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x_1^2 + a_1 \cdot x_1 + a_0 \\
&\vdots \\
y(x_n) = y_n &= a_n \cdot x_n^n + a_{n-1} \cdot x_n^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x_n^2 + a_1 \cdot x_n + a_0
\end{aligned}
\tag{4.25.}$$

Az ilyen típusú rendszert pl. elemi bázis transzformáció módszerrel segítségével lehet megoldani, ami nagy elemszámú mintánál meglehetősen nehezen számolható ki.

2. Lagrange - féle alappolinomos előállítás

Ennél a módszernél a keresett polinomot elemeire kell szétszedni a következők alapján: először is olyan függvényeket keresünk, amelyek teljesítik az alábbi feltételt:

- az x_k helyen a függvény értéke éppen $y_k = 1$, míg az összes többi adott $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ helyen 0.
- köztük pedig bármilyen módon mozoghat a polinom.



4. ábra: Egy lehetséges Lagrange - alappolinom

Ezt a feltételt teljesíti a Lagrange – féle alappolinom:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n)}
\tag{4.26.}$$

A (4.26.) képletet egy kicsit megvizsgálva látható:

- bármely x_k helyen az y_k értéke 1 lesz (hiszen ekkor x helyébe x_k -t írva a számláló és a nevező ugyanaz lesz.)
- bármely olyan adott helyen, ami nem x_k , ott pedig a számláló valamelyik tagja 0 lesz, és így a számlálót is 0-vá teszi. Ekkor pedig már teljesen mindegy, hogy milyen nem 0 nevezővel osztom el.

Azzal, ha egy egyszerű műveletet, szorzást ($y_k \cdot l_k(x)$) végrehajtjuk akkor x_k helyen nem 1-et, hanem éppen a keresett y_k értéket veszi fel a polinom.

Ezután már a keresett $y(x)$ egyenletet kell megoldani, hogy összeadva az összesen $n+1$ darab felszorozott polinomot, azaz

$$y(x) = y_0 \cdot l_0 + y_1 \cdot l_1 + \dots + y_n \cdot l_n \quad (4.27.)$$

legyen a végeredmény.

3. Newton – féle interpoláció

Ezt a módszert napjainkban osztott differenciák módszerének hívják. Ez egy olyan megoldási módszer, amely ugyanazt a fent említett Lagrange-féle interpolációs polinomot adja eredményül más matematikai megfontolások alapján.

Az interpolációnak van egy kellemetlen tulajdonsága, az oszcillálás, vagyis hogy a görbénken túl nagy „kinyúlások” vannak. Ezeket a kiugrásokat képes az approximáció, annak egy lehetséges megvalósítása a spline, csökkenteni, mintegy kisimítva ezzel a görbét. Approximáció az a matematikai művelet, amelynél nem az a feladat, hogy a megfigyelt pontokon átmenő görbét adjon, hanem hogy a pontokat a lehető legjobban közelítse. A trendsámításnak is éppen ez lenne a lényege.

A spline az interpolációs görbét alacsonyabb rendű, egymáshoz kapcsolódó görbeívekből állítja elő, azaz lokálisan keresi a pontokat közelítő görbét. Éppen ezen tulajdonság miatt képesek a trendet jobban leírni az approximációs spline-ok, hiszen nem globálisak, s így a helyi érzékenységük is nagyobb.

Egy a matematikában is új eljárás képes a regresszió és az approximáció előnyös tulajdonságait ötvözni. Az eljárás a legkisebb négyzetek módszerének elve alapján végzi a súlyok kiválasztását és iterációs eljárás eredménye a spline közelítés (Polgár [48]). Az alkalmazott módszer a megfelelő súlyok választásával alkalmas robosztus becslés elkészítésére, amellyel az outlierok is kiszűrhetők vagy kisebb súllyal szerepeltethetők.

Az eljárás első lépésében meg kell határozni, hogy hány splineből (N) álljon a keresett görbe. Ennek megállapításához a rendelkezésre álló adatok alapján „szakértői” döntést kell hozni.

A második teendő annak eldöntése, hogy az osztópontok ($z_0, z_1, \dots, z_N$), ahol az egyes görbedarabkák érintkeznek melyik pontok legyenek. Itt több lehetőség közül lehet választani. Az egyik megoldás, amikor a megfigyelt pontok közül választunk érintkezési pontot, azaz $z_0, z_1, \dots, z_N \in \{t_1, \dots, t_n\}$. A másik megoldásban megengedjük, hogy a köztes pontok bármely más értéket felvegyenek a megfigyelt pontok között, azaz $z_1, \dots, z_{N-1} \in]t_1, \dots, t_n[$, míg a végpontok meghatározásának ismét több lehetősége adódik. Az általam választott megoldásban az első megfigyelt érték az első spline kiindulópontja és az utolsó megfigyelés az utolsó spline záró pontja, vagyis $z_0 = t_1$ és $z_N = t_n$.

Az eljárás harmadik lépésében már a minimum feladat végrehajtása zajlik, ahol a keresett összefüggésünk:

$$\lambda \int_{z_0}^{z_N} (g'')^2 + \sum_{i=1}^N p_i (g(z_i) - f_i)^2 \rightarrow \min. \quad (4.28.)$$

Az összefüggés első tagja biztosítja a klasszikus interpolációs/approximációs spline görbületének értékeit, miközben a második tag a robosztus becslést végzi, s az outlierok szerepét csökkenti.

A keresett függvényünk a következőképpen néz ki:

$$g(z) = \begin{cases} g_1(z), z \in [z_0, z_1] \\ g_2(z), z \in [z_1, z_2] \\ \vdots \\ g_N(z), z \in [z_{N-1}, z_N] \end{cases} \quad (4.29.)$$

ahol valamennyi $g_i(z)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ keresett görbe „darabkák” harmadfokú polinomok, azaz köbös spline-ok.

A tözsdei folyamatokról bár tudjuk, hogy nem kiszámíthatóak, ám feltételezzük, hogy valamilyen szintig mégiscsak azok, ezért kell olyan görbetípust választanunk, ahol a görbület minimális. Ezt a feltételt egy harmadfokú görbe teljesíti, s ezért használunk köbös spline-t.

A harmadfokú görbe általános alakja:

$$g_i(z) = a_i \cdot z^3 + b_i \cdot z^2 + c_i \cdot z + d_i \quad (4.30.)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i a $g_i(z)$ függvény ismeretlen együtthatói, vagyis minden egyes görbénél 4 ismeretlen van.

A spline-nak az alábbi feltételeket kell teljesítenie:

1. A görbéknek folyamatosnak kell lenniük, vagyis az egyes pontokban a két érintkező görbének ugyanazt az értéket kell felvennie:

$$\begin{aligned} g_1(z_1) &= g_2(z_1) \\ g_2(z_2) &= g_3(z_2) \\ &\vdots \\ g_{N-1}(z_{N-1}) &= g_N(z_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.31.)$$

2. A görbéknek folytonosan differenciálhatónak kell lennie, ezzel biztosítva, hogy a görbékhez húzott érintő (a szélső két pontot kivéve) a pontokban megegyezzen (ezzel biztosítva, hogy ne „törjön” a görbe):

$$\begin{aligned}
g'_1(z_1) &= g'_2(z_1) \\
g'_2(z_2) &= g'_3(z_2) \\
&\vdots \\
g'_{N-1}(z_{N-1}) &= g'_N(z_{N-1})
\end{aligned} \tag{4.32.}$$

3. A görbék akárhányszor differenciálhatóak legyenek, hogy a görbék görbülete a közbenső pontokban azonos legyen:

$$\begin{aligned}
g''_1(z_1) &= g''_2(z_1) \\
g''_2(z_2) &= g''_3(z_2) \\
&\vdots \\
g''_{N-1}(z_{N-1}) &= g''_N(z_{N-1})
\end{aligned} \tag{4.33.}$$

A fenti feltételeknek megfelelően a minimum feladat algoritmusát MapleV 5 programmal futtatható, ahol az iterációs eljárás a következőképp zajlik:

1. megválasztjuk a p_i kezdő súlyok értékét. (Indításkor egységsúlyok alkalmazás a legmegfelelőbb.)
2. kiszámítja a a_i, b_i, c_i, d_i együtthatókat
3. ha egy előre megadott megállási feltétel²¹ teljesül leáll, különben $g(z)$ spline segítségével újra meghatározza a p_{i_j} súlyokat és visszaugrik a 2. lépéshez.

4.1.5 Modellszelekciós kritériumok

A megalkotott modellek közül ki kell választani azt, amelyik a legjobban leírja a megfigyelt idősort, hogy aztán ezt felhasználva tudjunk esetleges előrejelzéseket készíteni a jövőre vonatkozóan.

²¹ Az eltérés négyzetösszegek (SSE) minimalizálása a cél, így azt a feltételt adtam meg vizsgálataim során, hogy ahol az SSE értéke már nem csökken szignifikáns mértékben, ott kell megállítani az iterációt.

A legalapvetőbb ilyen szelekciós eszköz az R^2 , amivel azonban az a gond, hogy a változók számának növekedésével értéke akkor is nő, ha a modell jósága esetleg csökken. A maximum likelihood érték alapján szintén lehet dönteni. Ekkor az a modell a legjobb, melynek a legnagyobb az értéke. Így ennél objektívebb mutatókra van szükség, melyek a különböző számú paraméterekkel rendelkező becslések jóságát képesek összehasonlítani. Elemzéseim során 3 alapvető modellszelekciós kritériumot számítok ki, minden esetben az R^2 érték mellett:

1. AIC – Akaike információs kritérium [1]
2. HQ – Hannan-Quinn kritérium [26]
3. SIC - Schwarz információs kritérium [58]

AIC az egyik leggyakrabban alkalmazott kritérium, amely jól alkalmazható nem-lineáris esetekben és maximum likelihood becsléssel kapott modellek esetén is. Azonban azzal tisztában kell lenni, hogy segítségével csupán rangsorolni tudjuk a megalkotott modelleket, így kiválasztva a legjobban illeszkedőt. A kiválasztás során a legkisebb érték mutatja a legjobb, míg a legmagasabb érték a leggyengébb modellt, hiszen azt mutatja, hogy mekkora a nem magyarázott variancia értéke.

A kritérium számítási módja:

$$AIC = SSR \cdot e^{(2k/n)} = n \log \hat{\sigma}_p^2 + 2p \quad (4.34.)$$

ahol p a becsült paraméterek száma, n a minta elemszám, $\hat{\sigma}_p^2 = SSR/(n - p)$.

A Hannan és Quinn által 1979-ben kifejlesztett mutató kifejezetten az autoregresszió fokszámanak meghatározására készült, majd később regressziós modellek szelektálására is alkalmas változtatással [2] alakult ki a (4.23.) formája.

$$HQ = n \ln \left(\frac{SSR}{n} \right) + 2k \ln \ln(n) \quad (4.35.)$$

Schwarz információs kritériumot bayesi információs kritérium (BIC)²² néven is említi a szakirodalom. A kritérium figyelembe veszi a modell jóságát és a paraméterek számát (büntetve a növekvő paraméterszámot).

$$SIC = SSR \cdot (\ln n)^{2k/n} = n \log \hat{\sigma}_p^2 + p \log n \quad (4.36.)$$

Amíg a SIC kifejezetten jól működik kis minta esetén, ha az autoregresszió foksámát kell kiválasztani, addig az AIC találja meg a valódi foksámhoz legközelebb eső értéket, a HQ pedig a nagymintás kiválasztáshoz jobb [57].

A maximum likelihood érték alapján szintén lehet dönteni. Ekkor az a modell a legjobb melynek a legnagyobb az értéke, azaz a valószínűsége. Ez a modellválasztási kritérium is csak abban tud tehát segíteni, hogy a már elkészült modellek közül melyik a legmegfelelőbb, magát a modellt nem segít felépíteni.

4.2 ARMA modellek felépítése

A Box-Jenkins modellek felépítése három lépésből áll.

1. lépés: Identifikáció

Ezen lépés során először is ellenőrizni kell, hogy az idősor stacionárius-e. A stacionaritás rendkívül fontos, mert ha nem stacionárius idősorra készítünk becslét, akkor a paramétereink nem lesznek konzisztensek és hamis regressziót kaphatunk. A stacionaritást az ún. egységgyök tesztekkel lehet ellenőrizni²³.

²² Hívják még Schwarz kritérium (SC) és Schwarz-Bayesi inforációs kritérium, Schwarz-féle bayesi kritérium (SBC) néven is.

²³ Egységgyök estén a véletlen hibák nem évülnek el, hanem hosszú távon beépülnek a folyamatba.

A legismertebb egységgyök teszt a Dickley-Fuller teszt [18]. A véletlen bolyongás modelljénél $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ (ahol ε_t WN) azaz a késleltetett eredményváltozó együttthatója (abszolút értékben) 1. A várható érték függ t -től, illetve

$$\text{Var}(y_t) = \text{Var}(y_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) \quad (4.37.)$$

vagyis ha t a végtelenhez tart, akkor y_t varianciája is. A véletlen bolyongást átalakítva megkapjuk az egységgyök próbák alapmodelljét:

$$y_t = \rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.38.)$$

ahol $\rho > 0$.

A próbák során a H_0 alaphipotézissel azt ellenőrizzük, hogy $\rho = 1$, azaz a vizsgált folyamat valóban véletlen bolyongás, egységgyök van az idősorban. A H_1 ellenhipotézis szerint a folyamat stacionárius. A vizsgálat során problémák léphetnek fel, így egy kicsit módosított próba elvégzése a javasolt, ahol a modell:

$$\Delta y_t = \lambda \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.39.)$$

ahol $\lambda = \rho - 1$. Ebben az esetben a hipotézisek felírása is változik: $H_0 : \lambda = 0$, vagyis véletlen bolyongással van dolgunk és $H_1 : \lambda < 0$, vagyis stacionárius a folyamat. A statisztika t statisztika, ám a kritikus értékek nem t -eloszlást követnek, hanem Dickley-Fuller eloszlást.

Ezt a tesztet akkor lehet azonban csak alkalmazni, ha az idősorunkban sem trend, sem konstans tag nincs. Amennyiben azok is szerepelnek, akkor más modellt kell vizsgálni.

Konstanst tartalmazó idősornál:
$$\Delta y_t = c + \lambda \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.40.)$$

Konstanst és trendet is tartalmazó idősornál:

$$\Delta y_t = c + \delta \cdot t + \lambda \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.41.)$$

Ez utóbbi modell az, amit az esetek többségében alkalmazni célszerű, hacsak nem vagyunk teljesen biztosak abban, hogy nincs trend vagy konstans a vizsgált idősorban.

A Dickley-Fuller teszt általánosítása a kiterjesztett Dickley-Fuller teszt (ADF), melyet véletlen bolyongásnál bonyolultabb egységgyök folyamatokra alkalmazhatunk, ahol a véletlen bolyongáson kívül tetszőleges számú tagból álló stacioner tag is van a modellben. AZ ADF esetében is három lehetséges modell közül kell választanunk.

Sem konstans sem trend nincs az idősorban:

$$\Delta y_t = \lambda \cdot y_{t-1} + \theta_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \theta_2 \cdot \Delta y_{t-2} + \dots + \theta_k \cdot \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t \quad (4.42.)$$

Konstanst tartalmazó idősornál:

$$\Delta y_t = c + \lambda \cdot y_{t-1} + \theta_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \theta_2 \cdot \Delta y_{t-2} + \dots + \theta_k \cdot \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t \quad (4.43.)$$

Konstanst és trendet is tartalmazó idősornál:

$$\Delta y_t = c + \delta \cdot t + \lambda \cdot y_{t-1} + \theta_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \theta_2 \cdot \Delta y_{t-2} + \dots + \theta_k \cdot \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t \quad (4.44)$$

ahol k a késleltetések száma, melyet meg kell választani.

Éppen ez a választási kényszer az ADF problémája, s ezért is szoktak más teszteket is alkalmazni, amelyek megerősítik vagy éppen megcáfolják az eredményeinket.

A stacionaritást vizsgáló tesztek közül a másik legelterjedtebb a Kwiatkowski és szerzőtársai [38] által kifejlesztett KPSS teszt. A teszt nullhipotézise éppen ellentettje az

ADF-nek, mert itt a stacionaritást vagy trend stacionaritást nézzük, míg az ellenhipotézis elfogadása esetén beszélhetünk egységgyökről vagy differencia stacionaritásról.

A KPSS teszt egy nagymintás LM teszt, melynél a kiinduló modell:

$$y_t = \mu + \rho \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.45.)$$

ahol ε_t WN, fehér zaj folyamat és $t = 1, 2, \dots, T$ ²⁴. A null és az ellenhipotézis:

$$H_0 : |\rho| < 1 \text{ és } H_1 : \rho = 1; \mu = 0 \quad (4.46.)$$

A tesztstatisztikánk:

$$KPSS = \frac{1}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \cdot T^2} \sum_{t=1}^T S_t^2 \quad (4.47.)$$

ahol $S_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ és $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ a hosszú távú variancia becslése $\hat{\varepsilon}_t$ -nek:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 + 2 \sum_{\tau=1}^T \left(1 - \frac{\tau}{T-1}\right) \hat{\gamma}_\tau \quad (4.48.)$$

ahol $\hat{\gamma}_\tau$ a kovariancia becslése $\hat{\gamma}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{t=\tau+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-\tau}$ (4.49.)

A kritikus értékeket a szerzők megadták cikkükben [38].

A gond ennél a tesztnél is a T megválasztása. Ha túl nagy értéket veszünk, akkor csökken a próba ereje, ha viszont túl alacsony az értéke, akkor autokorreláció esetén a teszt elferdül.

A két teszt akkor hoz hasonló eredményt, ha az egyiknél el kell fogadni a H_0 alaphipotézist, míg a másikonál el kell utasítani azt. Ha mindkét teszt során elfogadjuk, vagy elutasítjuk az alaphipotézist, akkor egymásnak ellentmondó eredményeket kapunk.

²⁴ T páros szám szokott lenni!

Ha a vizsgált idősor nem stacionárius, akkor a vizsgálatok folytatása előtt azt azzá kell tenni. Az idősorok differenciálással tehetőek stacionáriussá.

Vegyük a $\Delta = 1 - L$ késleltetési operátort, ekkor

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= y_t - y_{t-1} \\ \Delta^2 y_t &= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) \\ &\vdots \\ \Delta^d y_t &= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) - \dots (y_{t-(d+1)} - y_{t-d})\end{aligned}\tag{4.50.}$$

Amennyiben az idősor d differenciálással stacionáriussá tehető és $ARMA(p, q)$ folyamatként felírható, akkor a folyamatot d -ed rendű $ARIMA(p, d, q)$ folyamatnak nevezzük.

A korrelogram és a parciális korrelogram ábrázolásával segítséget kapunk a p és q paraméterek előzetes becsléséhez.

2. lépés: Becslés

Ennél a lépésnél van szükség a konkrét p és q értékek meghatározásra és általuk a konkrét modell értékeinek kiszámítására. Ehhez általában maximum likelihood becslést használnak, amely egy rendkívül bonyolult folyamat, amit azonban a statisztikai programok könnyedén elvégeznek. Így ebben a lépésben igazán sok teendő nincsen.

3. lépés: Ellenőrzés

A program által kiszámított modell nem biztos, hogy a legjobban illeszkedő, hiszen az első lépésben hibát követhettünk el. Éppen ezért van szükség az ellenőrzésre. A korábbiakban

már ismertetett modellválasztási kritériumoknak itt ismét nagy szerep jut. Az első becslés elkészítése után célszerű több másikat is készíteni, túl- illetve alul- illeszteni a modellt, ezáltal meggyőződve arról, hogy melyik modell a leginkább megfelelő.

4.3 ARCH modellek felépítése

2003-ban Robert F. Engle Nobel-díjat kapott az „időben nem állandó volatilitású (*ARCH*) gazdasági idősorok modellezéséért”. Ezeket a modelleket előszeretettel használják a pénzügyi adatok elemzéséhez. A tőzsdeindexek és tőzsdei árfolyamok elemzéséhez is jól használható eszköz, hiszen ezeknek az adatoknak is igen nagy a volatilitása.

A volatilitást, azaz szórás egyenetlenségét képes tehát kezelni az *ARCH* modell. Ezért első lépésben ellenőrizni kell, hogy valóban szükség van-e erre a módszerre, valóban heteroszkedasztikusak-e a hibatagok. Ehhez a legegyszerűbb, ha ábrázoljuk a hibatagokat. Amennyiben ez nem elég meggyőző, vagy szeretnénk számokkal is alátámasztani modellválasztásunkat, akkor kiszámíthatjuk az alapstatisztikákat. Azon kívül, hogy azoknak közgazdasági jelentésük is van, még a maradékok eloszlásáról is kaphatunk információt.

Ha már biztosan tudjuk, hogy az *ARCH* modellt kell alkalmazni, akkor el kell dönteni, hogy hol kezdjük a vizsgálódást. Ahogyan az *ARMA* modelleknél, itt is alapesetben az *AR(1)+ARCH(1)* paraméterekkel szokás kezdeni, majd pedig a modellszelekciós kritériumok segítségével eldönteni, hogy melyik a legmegfelelőbb modell a vizsgált idősor jellemzésére.

Az *ARCH* modellek azzal a feltételezéssel élnek, hogy a variancia az utóbbi megfigyelt innovációktól (hibatagoktól) függ. Ha azonban azt feltételezzük, hogy ezeken kívül a megelőző feltételes varianciáktól is függ a variancia, akkor már a Bollerslev által kifejlesztett [4] általánosított *ARCH* modellről, a *GARCH*²⁵ modellről beszélünk.

²⁵ Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity

A $GARCH(p,q)$ modell összefüggései:

$$y_t = f(y_t) + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t \quad (4.51)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

ahol p a feltételes varianciák késleltetési száma, q pedig a hibatagok késleltetéseinek száma. Amennyiben az első egyenletben szereplő függvény a tagok autokorrelációjára épül

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \dots + \phi y_{t-m} + \varepsilon_t \quad (4.52.)$$

akkor a modellt $AR(m)+GARCH(p,q)$ modellnek nevezzük.

A $GARCH$ modell előnye, hogy amíg az $ARCH$ modellben sok késleltetést kellene számolni és így a becslés során sok paramétert kellene meghatározni, addig itt elkerülhető a p tag beiktatásával.

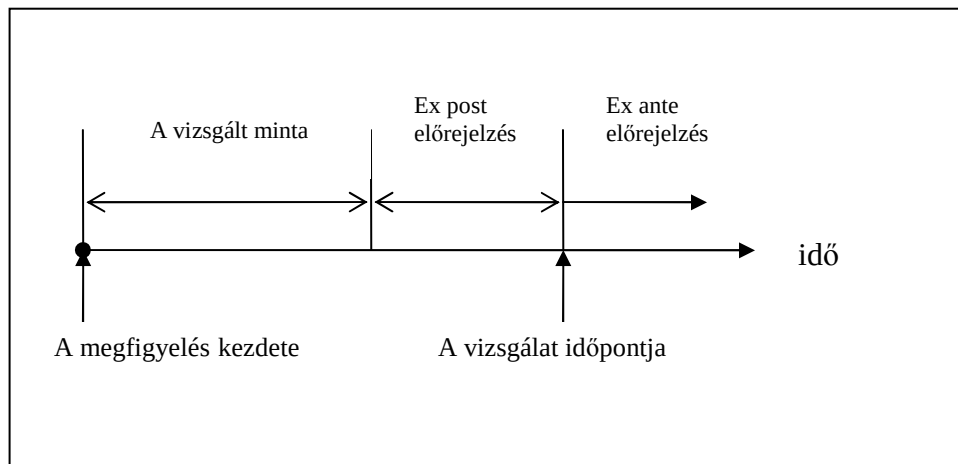
A becslést alapesetben egy egyszerű $GARCH(1,1)$ modellel szokás kezdeni.

A $GARCH$ -modell segítségével végső soron arra kívánunk becslést adni, hogy a legutolsó hozam alakulásának ismeretében, ugyanakkor figyelembe véve valamilyen szinten a régebbi megfigyeléseket, várhatóan mekkora szintű lesz az átlagtól való eltérés (Kóbor [35]).

4.4 Előrejelzések fajtái

A modellépítésnek gyakran az a jelentősége, hogy azáltal képesek lehetünk a jövőre vonatkozó előrejelzéseket elkészíteni. Előrejelzés készítése során a már megismert törvényszerűségeket felhasználva kívánunk az időben előre meghatározni a vizsgált

jelenség alakulását, értékét. Az előrejelzés azonban kétféle lehet: ex post és ex ante (11. ábra).



11. ábra: Előrejelzés az időben

Ex post előrejelzésről akkor beszélhetünk, ha a vizsgálatot úgy végeztük el, hogy nem az összes rendelkezésünkre álló adatot használtuk fel. Ilyenkor a meglévő adatainkból nem mindet használjuk fel a mintában a becslés elkészítéséhez, hanem valamennyit „megtartunk” ellenőrzés céljából. Az ex post²⁶ előrejelzések elkészítése után ugyanis éppen ezeknek a „megtartott” adatoknak a segítségével lesznek ellenőrizhetőek. Az ilyen előrejelzéseknek az a gyakorlati haszna, hogy láthatjuk, hogy mennyire pontos a felállított modell. Amennyiben azt tapasztaljuk, hogy az előrejelzett és a megfigyelt adatok lényegesen eltérnek, akkor az egész modellépítési folyamatot újra kell kezdeni.

Az ex ante előrejelzés arra az időre szól, amiről már nem áll rendelkezésünkre információ. Éppen ezért a modell előrejelző képességét itt már nem tudjuk ellenőrizni, csak becsülni.

Az előrejelzések készítése során szem előtt kell tartani, hogy az idő előrehaladtával még egy tökéletes modell előrejelző képessége is csökken. Éppen ezért szokás legfeljebb annyi időt előre jelezni, mint amennyi a megfigyelési időtartamunk volt.

²⁶ Ex pont, azaz a múltba irányuló előrejelzés, hiszen amikor ez előrejelzést készítjük, ezeket az adatokat már ismerjük, már múltbelinek számítanak.

5 A VIZSGÁLAT

5.1 A vizsgálat tárgya

Elemzésemben a RAX idősorát 2001. szeptember 7. - 2010. július 29. terjedő időszakban vizsgáltam. Ez a közel 9 éves időszak összesen 2216 megfigyelést jelent. A 12. ábra mutatja az értékek alakulását.



12. ábra: A RAX alakulása 2001. szeptember 7 - 2010. július 29.

Az index 2007 júliusáig emelkedő trendben volt, majd ezt követően egy eső trend alakult ki. A következő trendforduló 2009 áprilisában következett be. Azóta ismét emelkedik az index értéke.

5.2 Determinisztikus trendszámítás

5.2.1 Lineáris trend

Mint ahogyan azt a 12. ábra jól mutatja, a RAX időszora nem lineáris trendet követ. Azonban a technikai elemzésekben trend alatt csak a lineáris trendet értik, ezért én mintegy alapmodellként meghatároztam a lineáris trendet.



13. ábra: A RAX idősorára illesztett lineáris trend

A kapcsolatot leíró egyenlet a következőképpen alakult: $\hat{y}_t = 607,711 + 0,518046t$

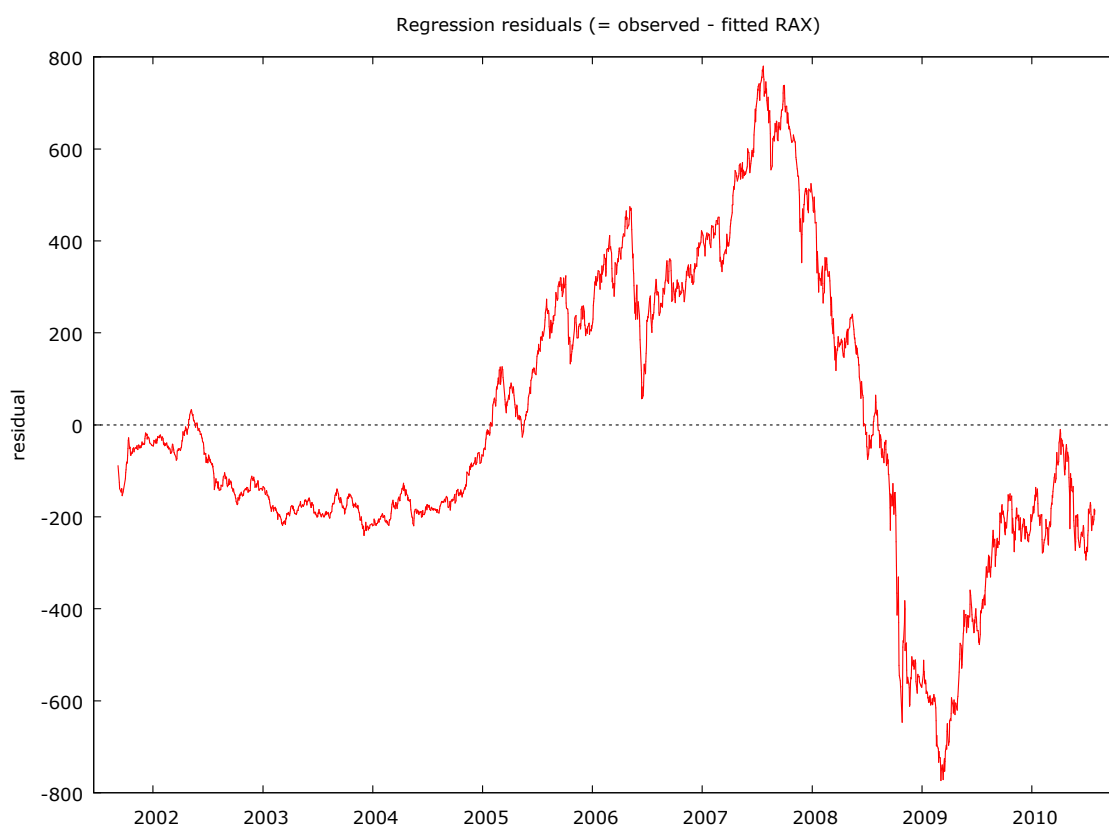
ahol a 607,711 az az érték, amit a trend alapján a RAX felvett 2001. szeptember 5-én. 0,518046 pedig a kereskedésnaponkénti átlagos RAX érték növekedés. A 13. ábra és a számok (a p kicsi értéke) is azt tükrözik, hogy egyik paraméter sem mondható szignifikánsnak.

1. Táblázat: Lineáris trend illesztése a RAX-ra

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>
const	607,711	13,1068	46,3660	<0,00001
t	0,518046	0,010241	50,5856	<0,00001

Mean dependent var	1181,965	S.D. dependent var	452,6993
Sum squared resid	2,11e+08	S.E. of regression	308,3937
R-squared	0,536131	Adjusted R-squared	0,535922
F(1, 2214)	2558,901	P-value(F)	0,000000
Log-likelihood	-15844,10	Akaike criterion	31692,20
Schwarz criterion	31703,61	Hannan-Quinn	31696,36
rho	0,998675	Durbin-Watson	0,002776

Az R^2 alacsony értéke (0,53) is mutatja, hogy mennyire kicsi a magyarázó ereje a modellnek. A különböző modell szelekciós kritériumok is magas értékűek lettek.



14. ábra: Lineáris modell véletlen tagjai

A trend leválasztása utáni maradékokat mutatja a 14. ábra. Jól megfigyelhető hogy a reziduuumok a 0 értékhez képest lent, illetve fent csoportosulnak. Ez az ábra egy tipikus

autokorrelált maradéktagot mutat, amire vonatkozóan a tesztstatisztikák is megerősítő értékeket hoznak. A 2. Táblázat mutatja a korrigálatlan R^2 értékét (0,99722), majd pedig az ezek alapján számított próbák értékét. Mindhárom próba ugyanarra az eredményre jut, miszerint az adott becslés maradéktagjai között autokorreláció van.

2. Táblázat: Autokorreláció tesztelése lineáris modell esetén

Unadjusted R-squared = 0,997220
Test statistic: LMF = 158454,397875, with p-value = $P(F(5,2209) > 158454) = 0$
Breusch-Godfrey statistic: $nR^2 = 2209,838564$, with p-value = $P(\text{Chi-square}(5) > 2209,84) = 0$
Ljung-Box $Q' = 10998,9$, with p-value = $P(\text{Chi-square}(5) > 10998,9) = 0$

A szórásokra vonatkozó vizsgálatok szintén azt mutatják (lásd 3. Táblázat, 4. Táblázat), hogy a homoszkedaszticitás még a legkisebb $\alpha = 0,001$, azaz 0,1%-os szignifikancia szint mellett sem teljesül.

3. Táblázat: White teszt a heteroszkedaszticitásra

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value	
const	-58943,6	7161,92	-8,230	3,15e-016	***
t	242,377	14,9204	16,24	3,79e-056	***
sq_t	-0,0700314	0,00651648	-10,75	2,70e-026	***

Unadjusted R-squared = 0,230108

Test statistic: $nR^2 = 509,918819$,
with p-value = $P(\text{Chi-square}(2) > 509,918819) = 0,000000$

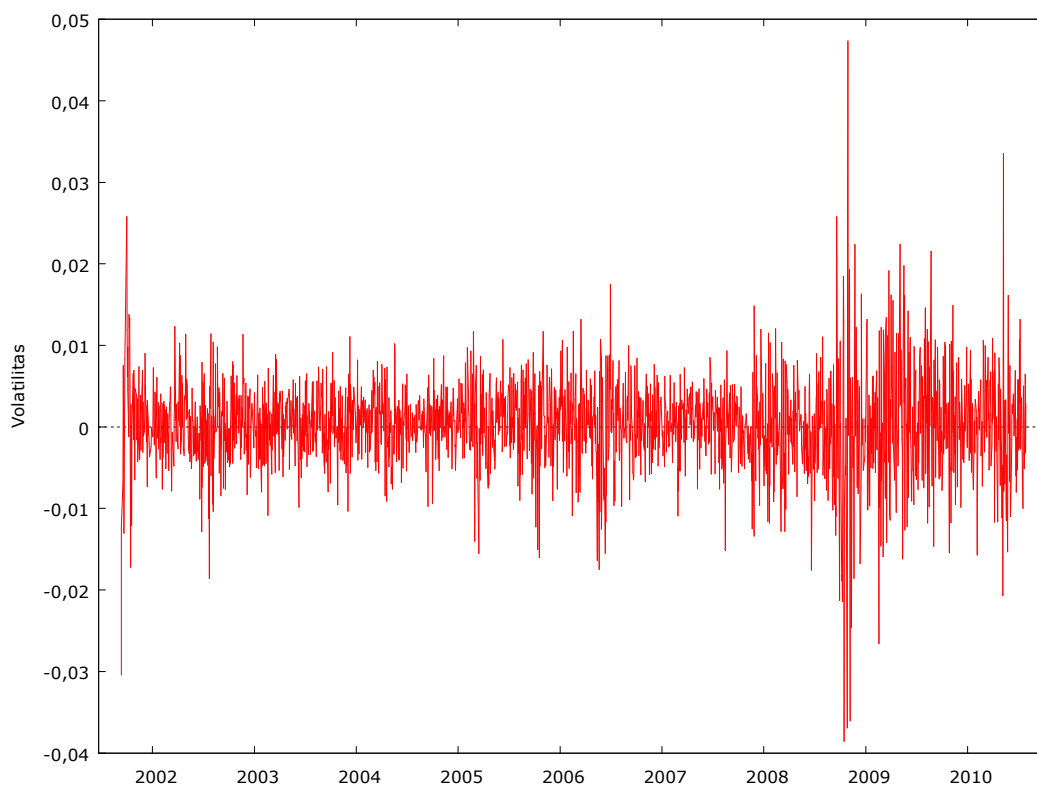
4. Táblázat: Breusch-Pagan teszt a heteroszkedaszticitásra

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value	
const	-0,0163054	0,0515019	-0,3166	0,7516	
t	0,000916829	4,02408e-05	22,78	2,11e-103	***

Explained sum of squares = 762,263

Test statistic: LM = 381,131656,
with p-value = $P(\text{Chi-square}(1) > 381,131656) = 0,000000$

A heteroszkedaszticitást rendkívül jól tükrözi a volatilitást bemutató 15. ábra.



15. ábra: A RAX volatilitása 2001. szeptember 7- 2010. július 29.

A 16. ábra a reziduumokat várható értékük függvényében ábrázolja. Jól látszik, hogy a normális eloszlást jelentő haranggörbéhez képest a megfigyelésünk eloszlása mennyire nem normális. Ezt természetesen illeszkedésvizsgálattal is alá lehet támasztani (lásd 5. Táblázat).

5. Táblázat: Maradékok eloszlása lineáris trend esetén

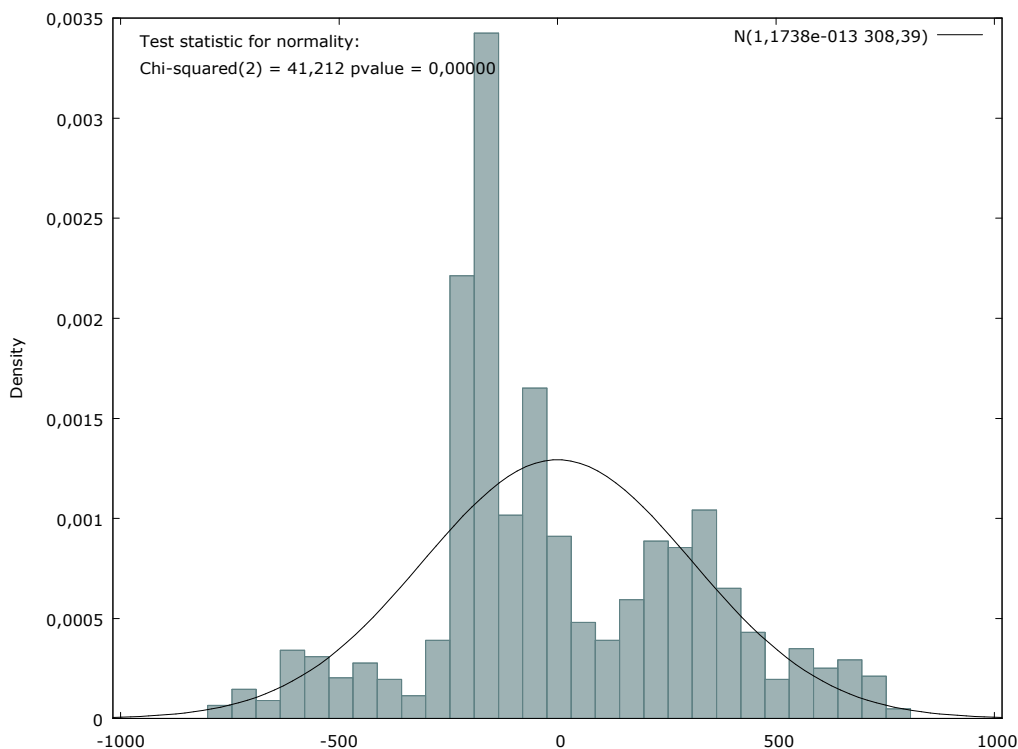
Frequency distribution, obs 1-2216
number of bins = 29, mean = 1,17381e-013, sd = 308,394

interval	midpt	frequency	rel.	cum.	
< -745,44	-773,18	8	0,36%	0,36%	
-745,44 - -689,97	-717,71	18	0,81%	1,17%	
-689,97 - -634,50	-662,23	11	0,50%	1,67%	
-634,50 - -579,02	-606,76	42	1,90%	3,56%	
-579,02 - -523,55	-551,29	38	1,71%	5,28%	
-523,55 - -468,08	-495,81	25	1,13%	6,41%	
-468,08 - -412,60	-440,34	34	1,53%	7,94%	
-412,60 - -357,13	-384,87	24	1,08%	9,03%	
-357,13 - -301,66	-329,39	14	0,63%	9,66%	
-301,66 - -246,18	-273,92	48	2,17%	11,82%	
-246,18 - -190,71	-218,44	272	12,27%	24,10%	****
-190,71 - -135,23	-162,97	421	19,00%	43,10%	*****
-135,23 - -79,761	-107,50	125	5,64%	48,74%	**

-79,761	-	-24,287	-52,024	203	9,16%	57,90%	***
-24,287	-	31,186	3,4494	112	5,05%	62,95%	*
31,186	-	86,660	58,923	59	2,66%	65,61%	
86,660	-	142,13	114,40	48	2,17%	67,78%	
142,13	-	197,61	169,87	73	3,29%	71,07%	*
197,61	-	253,08	225,34	109	4,92%	75,99%	*
253,08	-	308,55	280,82	105	4,74%	80,73%	*
308,55	-	364,03	336,29	128	5,78%	86,51%	**
364,03	-	419,50	391,76	80	3,61%	90,12%	*
419,50	-	474,97	447,24	53	2,39%	92,51%	
474,97	-	530,45	502,71	24	1,08%	93,59%	
530,45	-	585,92	558,19	43	1,94%	95,53%	
585,92	-	641,40	613,66	31	1,40%	96,93%	
641,40	-	696,87	669,13	36	1,62%	98,56%	
696,87	-	752,34	724,61	26	1,17%	99,73%	
>=		752,34	780,08	6	0,27%	100,00%	

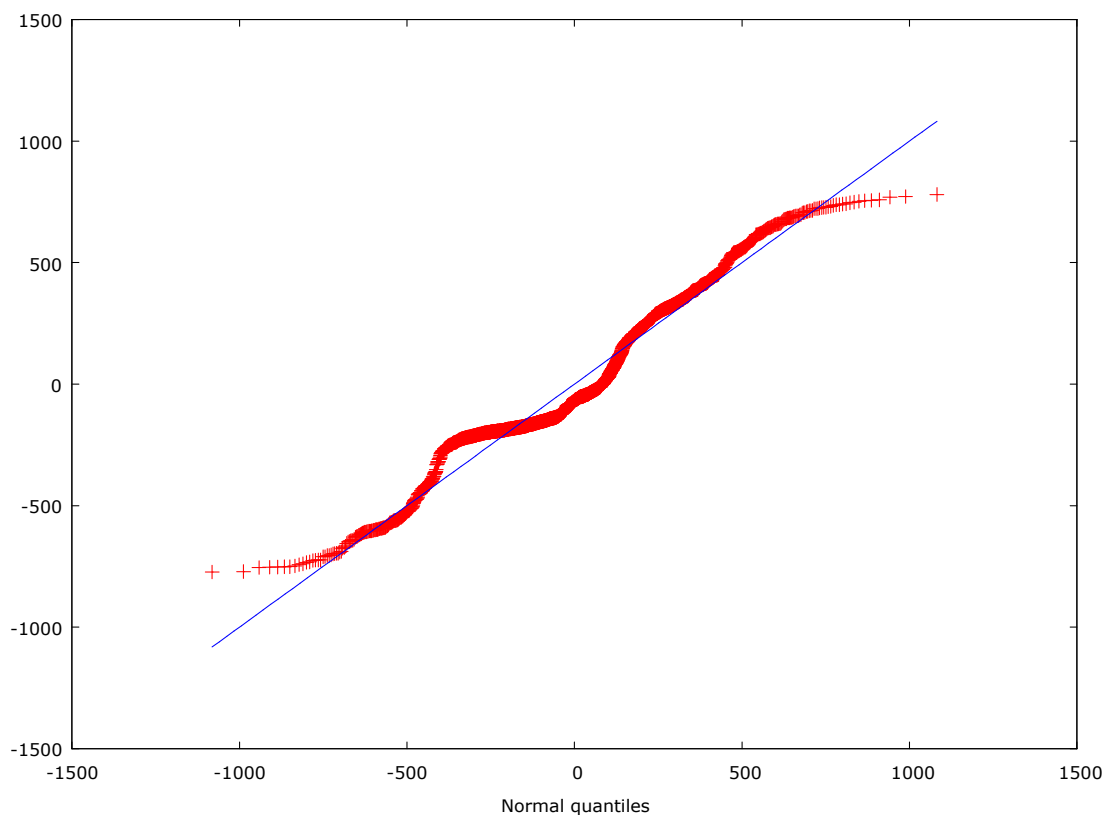
Test for null hypothesis of normal distribution:
Chi-square(2) = 41,212 with p-value 0,00000

A vizsgálat eredménye az ábra sarkában is leolvasható. A tesztstatisztika értéke 41,212, míg a kritikus érték χ^2_2 még 0,1%-os szignifikancia mellett is csak 10,597. Nem csoda, hogy az (H_0 : a maradék normális eloszlást követ) alaphipotézist semmilyen érték mellett nem tudjuk elfogadni ($p = 0,00000$).



16. ábra: A maradékok eloszlása és a normális eloszlás

A normalitás tényének elutasítása mellett szól a 17. ábra, ahol egyértelműen láthatjuk a maradékok eltérését a normális eloszlást jelentő egyeneshez képest.



17. ábra : A maradékok Q-Q plotja

Minden lehetséges módon bebizonyosodott, hogy a RAX 9 éves idősorának elemzéséhez nem alkalmas a lineáris trend feltételezése. Így tehát másik függvényformát kell keresni, amely jobban jellemzi a 12. ábra grafikonját.

5.2.2 Polinomiális trendek

A polinomiális trend fokszámának növelésével a görbe egyre jobban illeszkedik egy olyan eloszlásra, mint amilyen a megfigyelt adatsoromé. Azonban nincs semmi értelme a fokszám egy bizonyos határon túli növelésének. Éppen ezért én csak a kvadratikuss, a harmadfokú, a negyedfokú és az ötödfokú trendeket vizsgáltam. A továbbiakban minden, a modellekre vonatkozó adatot együtt mutatok be.

A feladatomban tehát a

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t^2 + \beta_3 \cdot t^3 + \varepsilon_t \quad (5.1.)$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t^2 + \beta_3 \cdot t^3 + \beta_4 \cdot t^4 + \varepsilon_t$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t^2 + \beta_3 \cdot t^3 + \beta_4 \cdot t^4 + \beta_5 \cdot t^5 + \varepsilon_t$$

egyenletek becslése volt. Az OLS becslés eredményét az 6. Táblázat foglalja össze.

6. Táblázat: Polinomiális trendek

	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
const	235,5**	522,5**	920,4**	480,0**
	(16,57)	(20,10)	(20,85)	(18,51)
t	1,525**	-0,02671	-3,609**	2,332**
	(0,03452)	(0,07851)	(0,1303)	(0,1685)
t^2	-0,0004541**	0,001295**	0,008563**	-0,01018**
	(1,508e-05)	(8,229e-05)	(0,0002389)	(0,0004708)
t^3		-5,260e-07**	-5,624e-06**	1,691e-05**
		(2,440e-08)	(1,619e-07)	(5,383e-07)
t^4			1,150e-09**	-1,028e-08**
			(3,622e-011)	(2,676e-010)
t^5				2,063e-012**
				(4,805e-014)
korrigált R^2	0,6707	0,7278	0,8129	0,8980
lnL	-1,546e+004	-1,525e+004	-1,484e+004	-1,416e+004

A kapott polinomiális trendek egyenletei a táblázat segítségével könnyen felírhatóak:

$$y_t = 235,5 + 1,525t + 0,00045t^2$$

$$y_t = 522,5 - 0,0267 \cdot t + 0,0013 \cdot t^2 - 5,26 \cdot 10^{-7} \cdot t^3 \quad (5.2.)$$

$$y_t = 920,4 - 3,609 \cdot t + 0,0086 \cdot t^2 - 5,62 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 1,15 \cdot 10^{-9} \cdot t^4$$

$$y_t = 480 + 2,332 \cdot t - 0,0102 \cdot t^2 + 1,691 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 - 1,028 \cdot 10^{-8} \cdot t^4 + 2,063 \cdot 10^{-12} \cdot t^5$$

A táblázatban az értékek alatt zárójelben a standard hibák vannak feltüntetve. ** 5 %-os szignifikancia szintet jelez, azaz a harmadfokú polinom t együtthatóján kívül az összes trend valamennyi változója 5 %-on szignifikáns csak, ami határozottan jobb eredmény,

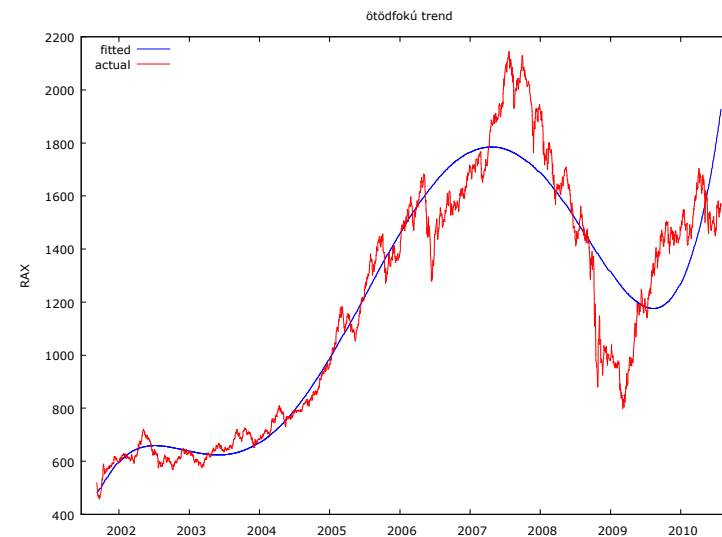
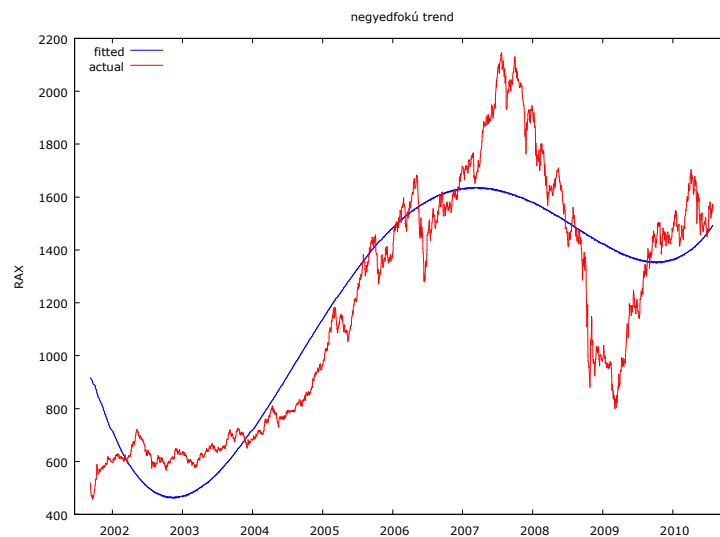
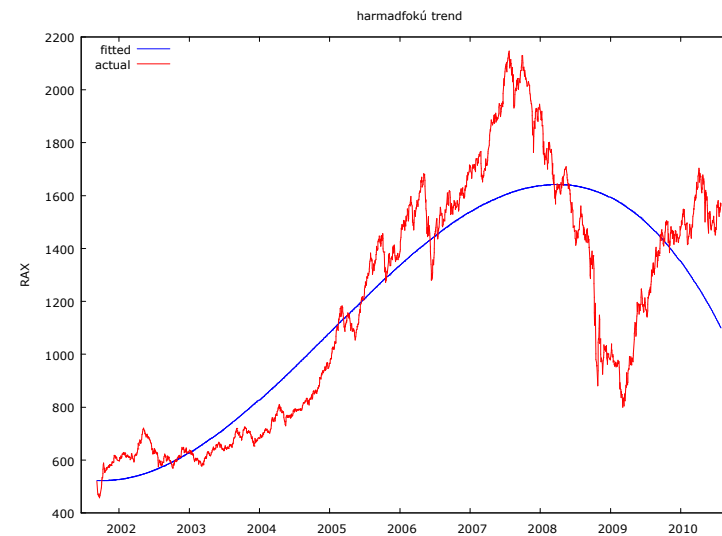
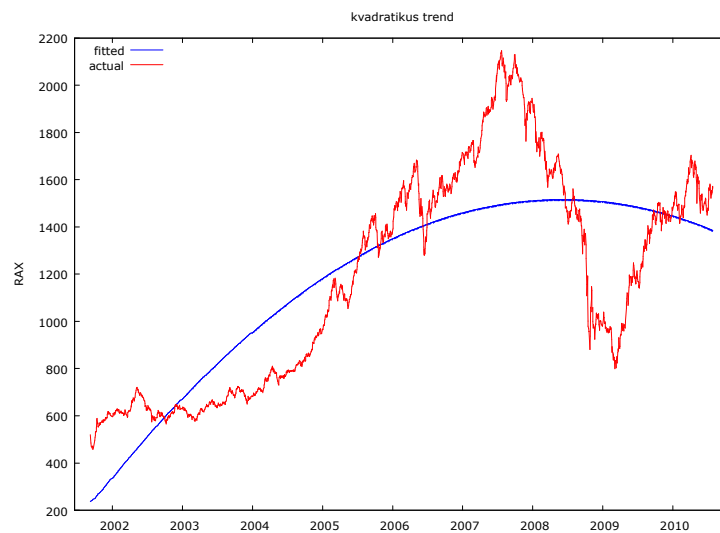
mint a lineáris trend estében, ahol még az 1 %-ot sem érte el (lásd 1. Táblázat utolsó oszlopa).

A táblázat utolsó előtti sora a korrigált R^2 értékeket mutatja. Jól megfigyelhető a mutató azon tulajdonsága, hogy a magyarázó paraméterek számának növelésével akkor is nőhet az R^2 értéke, ha a modell jósága valójában nem nő. Ahhoz, hogy eldönthessük, valóban nőtt-e a jóság, szükség van más modellszelekciós kritériumok értékének kiszámítására is (7. Táblázat).

7. Táblázat: Polinomiális trendek modellválasztási kritériumai

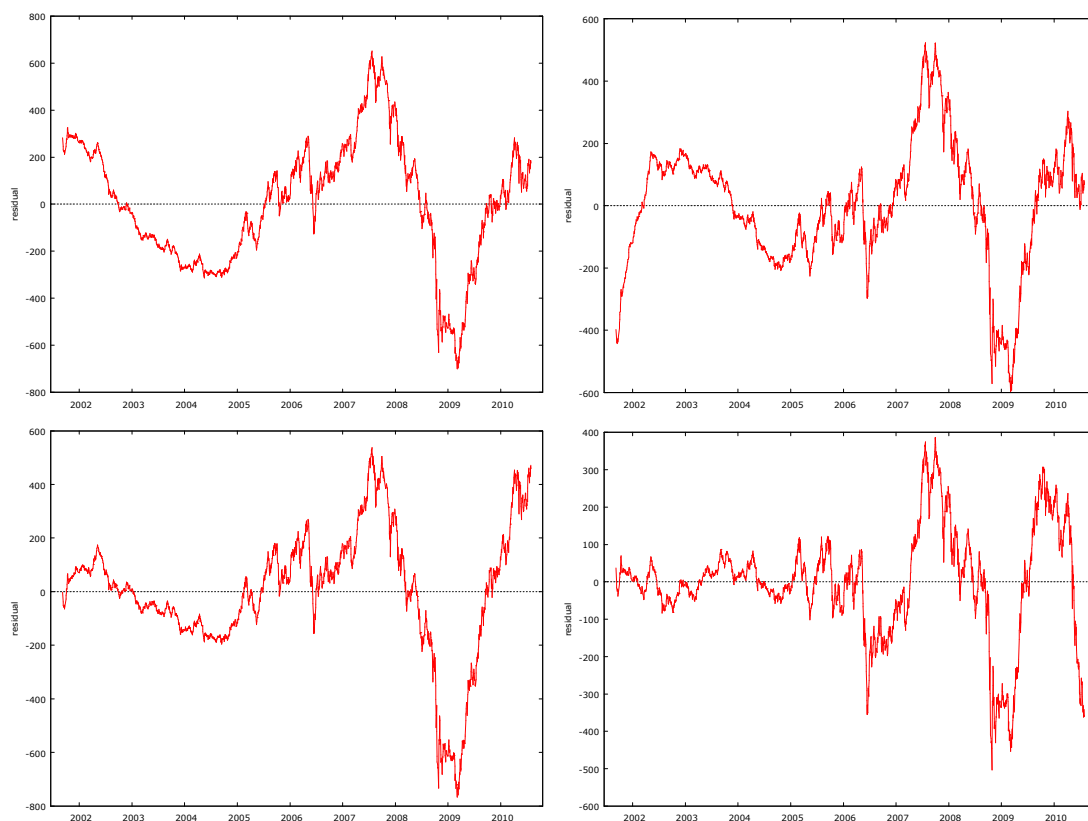
	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
korrigált R^2	0,6707	0,7278	0,8129	0,8980
log-likelihood	-1,546e+004	-1,525e+004	-1,484e+004	-1,416e+004
AIC	30932,77	30512,11	29681,94	28339,76
HQ	30939,02	30520,44	29692,35	28352,26
SIC	30949,88	30534,92	29710,45	28373,98

A 7. Táblázat első két sora tulajdonképpen már szerepelt az 6. Táblázatban is, ám mivel ezek is segíthetnek a legmegfelelőbb modell kiválasztásában, így mindenképpen itt a helyük. Látható, hogy mindhárom kritérium szerint a legjobb polinomiális modell az ötödfokú, míg legrosszabban a kvadratikus illeszkedik. Ezt szemlélteti a 18. ábra, melyen a RAX és a különböző fokszámú polinomiális trendek láthatóak.



18. ábra: Polinomiális trendek

A 18. ábra jól mutatja, hogy a fokszám növelésével mennyivel szebben simul a trend a vizsgálat tárgyát képező RAX idősorához. Az ötödfokú trend majdnem tökéletesen írja le - egészen 2006 márciusáig - az idősort. A maradékok (lásd 19. ábra) is jól mutatják, hogy a fokszám növekedése a modellek javulását hozta, ám még a legjobban illeszkedő ötödfokú trend sem képes a 2008. április és 2009. november közötti időszak mozgásait megragadni.



19. ábra: Polinomiális trendek maradék tagjai

A maradékokra vonatkozó négy tulajdonság közül hármat szokás ellenőrizni, mert ha azok nem teljesülnek, akkor az OLS becslésünk biztosan nem BLUE. Az autokorreláció teszteléshez a korrigálatlan R^2 értékre van szükség, ezért szerepel ez a 8. Táblázat első sorában.

8. Táblázat: Polinomiális trendek autokorrelációjának tesztelése

	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
Korrigálatlan R^2	0,995590	0,995323	0,991331	0,987529
LMF statisztika	99697,69614	93931,03165	50451,40722	34920,1659
Breusch-Godfrey próba $= n \cdot R^2$	2206,22775	2205,63529	2196,78897	2188,36358
Ljung-Box Q'	10946	10880,3	10790,8	10574,8

A vizsgálat során azt feltételeztem, hogy egy adott maradéktag maximum az öt ötlet megelőző maradékkal van korrelációban, azaz ötödfokú autokorrelációra végeztem a tesztelést.

Az LM próba F eloszlást követ. A kritikus érték mind a négy trend esetében 5,22, amit mind a négy becslés statisztikája jócskán meghalad.

A Breusch-Godfrey és a Ljung-Box próbák χ_p^2 eloszlást követnek, ahol p a vizsgált autokorrelációk száma, azaz ebben a vizsgálatban $p = 5$. A kritikus érték tehát egy 5 szabadságfokú χ_5^2 érték, amely még a legkisebb (0,1%-os) szignifikancia mellett sem nagyobb 20,515-nél. A négy trend statisztikája mindkét próba során meghaladta a 2000-es, illetve 10000-es értéket, azaz igencsak távol állt a kritikus értéktől és így a H_0 autokorrelálatlanság alaphipotézisétől.

Homoszkedaszticitás esetén a becsléssel kapott trend értékeit kivonva a megfigyelt adatokból a maradékok szórása azonos. Ám ahogy ezt már a 19. ábra is megmutatta, egyik polinomiális trend estében sem teljesül ez a feltétel, hiszen a reziduumok jól láthatóan csoportosulnak a 0 érték pozitív majd negatív oldalán. Azon állításomat, hogy a különböző fokszámú polinomiális trendek maradéktagjai heteroszkedasztikusak, számokkal is alá tudom támasztani. Ennek érdekében elvégeztem a White próbát (9. Táblázat), a White próbát olyan megoldásban, ahol csak a magyarázó változók és azok négyzetei szerepeltek a segédregresszióban²⁷ (10. Táblázat) és a Breusch-Pagan próbát (11. Táblázat).

²⁷ Vagyis a magyarázóváltozók keresztszorzatai nem szerepeltek!

9. Táblázat: Polinomiális trendek White tesztje

	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
const	36924,0***	52229,6***	109604***	4251,13
t	160,353***	-929,024***	-1578,35***	-299,790
t^2	-0,607644***	4,31188***	8,30003***	4,20000*
t^3		-1,85700e+011	-1,46373e+011	-9,97046e+09
t^4			-1,47140e+08	-7,91412e+07
t^5				168,664
$(t)^2$	kmk	kmk	kmk	kmk
$(t^2)^2$	-1,75427e-07***	2,85619e+07	kmk	kmk
$(t^3)^2$		3,89950e-013***	-220,162	kmk
$(t^4)^2$			0,000000***	3,91213e-08
$(t^5)^2$				0,000000***
$t \cdot t^2$	0,000622505***	1,86492e+011	1,46043e+011	9,97215e+09
$t \cdot t^3$		-2,85619e+07	1,43749e+08	7,91744e+07
$t \cdot t^4$			56223,7	-168,675
$t \cdot t^5$				0,370032
$t^2 \cdot t^3$		-2,68688e-09***	-54390,2	kmk
$t^2 \cdot t^4$			220,162	-0,370041
$t^2 \cdot t^5$				0,000163633
$t^3 \cdot t^4$			0,000000***	-0,000163634
$t^3 \cdot t^5$				3,91213e-08
$t^4 \cdot t^5$				0,000000***
Korrigálatlan R^2	0,240637	0,337191	0,311372	0,386239
$n \cdot R^2$	533,250812	747,215356	690,001053	855,904572
p	4	8	12	16

A White próba során a segédregresszióban a maradéktagok szórását a t változó megfelelő hatványaival, azok négyzeteivel és a keresztszorzataikkal magyarázzuk. A próbastatisztika egy nagymintás LM próba, ahol a korrigálatlan R^2 és a minta elemszám szorzatára van szükség. H_0 alaphipotézist akkor tudjuk elfogadni, ha a számított érték kisebb a kritikus értéknél, ami a χ_p^2 megfelelő szabadságfok melletti értéke. A p szabadságfok különböző a

különböző foksámú trendek estében. Mind a négy trend számított statisztikája igen magas értéket vett fel, így egyetlen esetben sem teljesül a homoszkedaszticitás.

A 9. Táblázat méretei miatt itt nem állt módomban a standard hibák vagy a t -értékek feltüntetése, ezért az értékek melletti csillagok jelzik, hogy az adott változó milyen szignifikancia mellett szignifikáns. A * estén az adott változó csak legfeljebb 10%-os szignifikancia mellett elfogadható, míg *** esetén ez az érték 1%-ra csökken. Ahol nincs jelzés, azok a változók bármely szokásos szignifikancia érték mellett elfogadhatóak.

A táblázatban *kmk* rövidítés látható, mely kollinearitás miatt kihagyva kifejezés helyett áll. Azaz az adott változó nem került bele a segédregresszióba, mert a tökéletes kollinearitás²⁸ esete állt volna fent, ami viszont csökkentette volna a többi változó szignifikanciáját.

10. Táblázat: Polinomiális trendek White tesztje (csak négyzetes tagok)

	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
const	90050,7***	-8191,31	85741,2***	13104,8**
t	-298,876***	149,367*	-851,505***	-442,101
t^2	0,298158***	-0,294035	2,79281***	3,40648***
t^3		0,000127141	-0,00390260***	-0,0108513***
t^4			-1,21874e+08	-4,99385e+07***
t^5				-1,29036e-08***
$(t)^2$	Kmk	Kmk	Kmk	Kmk
$(t^2)^2$	-3,72254e-08***	4,73550e-08	1,21874e+08	4,99385e+07
$(t^3)^2$		0,000000***	-2,36513e-013***	4,37288e-012***
$(t^4)^2$			0,000000***	0,000000***
$(t^5)^2$				0,000000***
Korrigálatlan R^2	0,210476	0,316978	0,303719	0,353782
$n \cdot R^2$	466,413795	702,423167	673,042333	783,981140
p	3	5	7	9

A White próba elvégezhető úgy is, ha csupán a változók négyzeteit vesszük, a keresztszorzatokat nem. Ekkor jelentősen csökken a segédregresszió

²⁸ Tökéletes vagy egzakt kollinearitásról beszélünk, ha két magyarázóváltozó között lineáris kapcsolat van.

magyarázóváltozóinak száma, és ezáltal a χ_p^2 eloszlás szabadságfokainak száma. A kiszámított trendeknél a próbastatisztika értéke csökkent, ám nem olyan mértékben, hogy a heteroszkedaszticitás ténye elutasítható legyen.

11. Táblázat: Polinomiális trendek Breusch-Pagan tesztje

	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
const	0,191146**	0,729296***	0,895624***	-0,216864
	(0,0840144)	(0,132982)	(0,153036)	(0,185959)
t	0,00106875***	-0,00415533***	0,000479686	0,00415257 **
	(0,000175027)	(0,000519349)	(0,000956026)	(0,00169362)
t^2	-2,29460e-07***	5,38444e-06***	-7,68759e-06***	-1,39240e-05***
	(7,64429e-08)	(5,44297e-07)	(1,75307e-06)	(4,73120e-06)
t^3		-1,44798e-09***	9,40846e-09***	1,63296e-08***
		(1,61386e-010)	(1,18796e-09)	(5,40944e-09)
t^4			-2,78646e-012***	-6,98456e-012***
			(2,65820e-013)	(2,68959e-012)
t^5				0,000000**
				(0,000000)
SSR	300,05	2013,85	1578,28	2165,62
LM	150,025216	1006,923703	789,140646	1082,808665
p	2	3	4	5

A harmadik homoszkedaszticitásra vonatkozó próba a Breusch-Pagan próba. A próbastatisztika kiszámításához itt most a regressziós eltérés négyzetösszegre (SSR) lesz szükség. Ennek a fele ugyanis a nagymintás LM próba próbastatisztikájának értéke. Az eloszlás itt is χ_p^2 eloszlást követ, ahol a szabadságfokok száma megegyezik a trend fokszámaival. A kritikus értékek még a legkisebb szignifikancia szint mellett sem haladják meg a 21-et, így ez a próba is csak elutasíthatja az alaphipotézist, azaz minden trend heteroszkedasztikus.

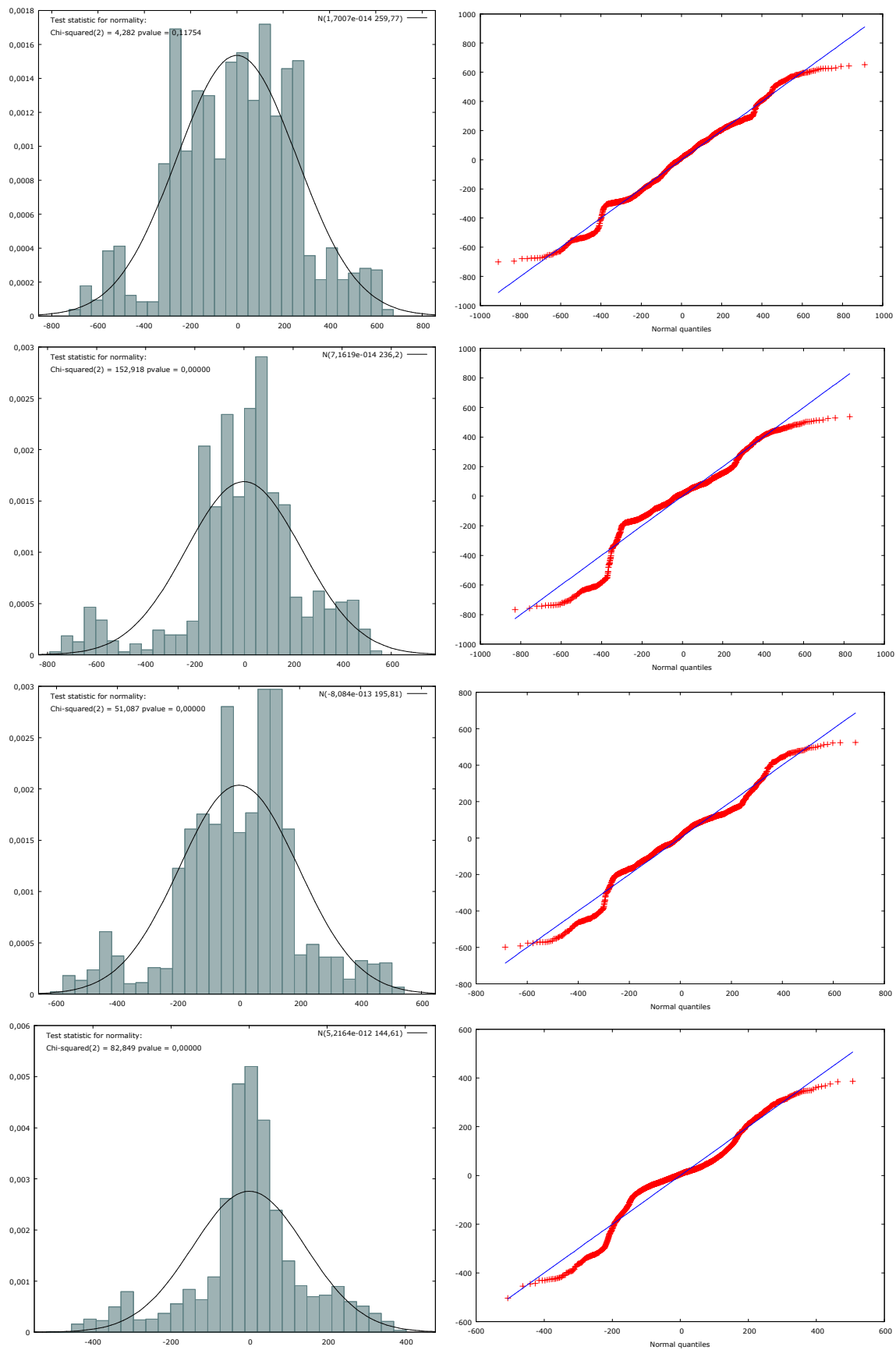
A maradéktagokra vonatkozó utolsó feltétel a normalitás. Ennek megléte vagy éppen meg nem léte könnyen ellenőrizhető a maradékok eloszlását megmutató ábrán illetve a Q-Q ploton, ami a normális eloszlástól vett eltérést mutatja meg személetesen. Ezek láthatóak a

négy polinomiális trendre vonatkozóan a 20. ábrán. A kvadratikus trend Q-Q plotja alapján azt mondhatnánk, hogy az közel esik a normális eloszláshoz, csupán a vastagszélűség problémája az, ami igen szembeötlő. A csúcsosságot a pontok meredeksége mutatja, ami az ötödfokú polinom esetében figyelhető meg a Q-Q plot közepén.

A hisztogramok mindegyike 29 osztályközt tartalmaz. Az osztályközökből az illeszkedésvizsgálattal kapott eredményeket a 12. Táblázat tartalmazza. Látható, hogy a kvadratikus trendnél teljesül egyedül a normális eloszlásra vonatkozó hipotézis, hiszen itt a p érték 0,11754, azaz 11,754%-os szignifikancia szinten lehetne először a normalitást elutasítani, ám ilyen magas szignifikancia szinttel nem szokás dolgozni.

12. Táblázat: Polinomiális trendek illeszkedésvizsgálatának eredményei

	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú
próbat statisztika	4,282	152,918	51,087	84,849
p	0,11754	0,00000	0,00000	0,00000



20. ábra: Polinomiális trendek reziduumainak eloszlása és Q-Q plotja

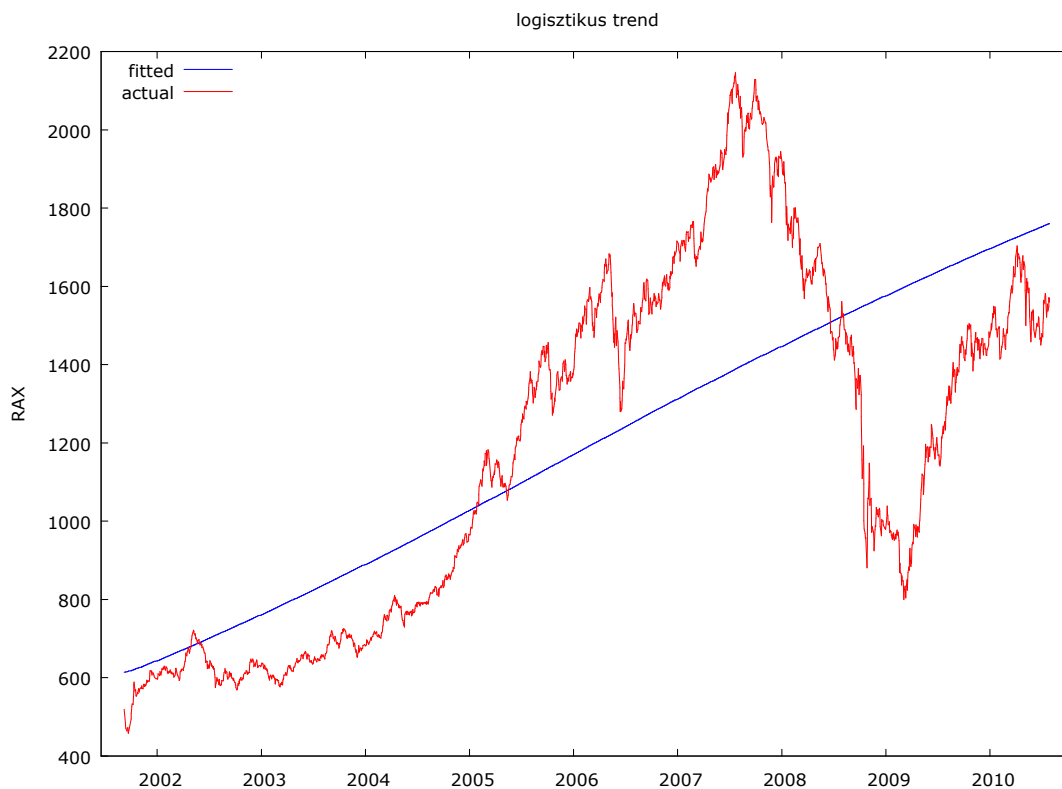
5.2.3 Logisztikus trend

Bár a RAX időszora nem tartozik a tipikus telítődési görbék közé, mégis úgy véltem, érdekes lehet megvizsgálni, vajon milyen eredményeket kapok, ha logisztikus kapcsolatot feltételezek az idő és a RAX időszora között. Az eredményváltozó logisztikus transzformálásának nincs akadálya, hiszen minden RAX érték pozitív.

A modell alapján a becsült eredményváltozót a következő összefüggésből kaphatjuk meg:

$$\hat{y}_t = \frac{2360,83}{1 + e^{-1,04669 + 0,00096t}} \quad (5.3.)$$

ahol 2360,83 a telítődési görbe maximuma. Az így kapott trend ábrája (21. ábra) meglepően hasonlít a lineáris trendére (13. ábra).



21. ábra: Logisztikus trend és a RAX

13. Táblázat: Logisztikus trend számításának adatai

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>	
const	-1,04669	0,0254583	-41,1137	<0,00001	***
t	0,000958099	1,98918e-05	48,1656	<0,00001	***

Statistics based on the transformed data:

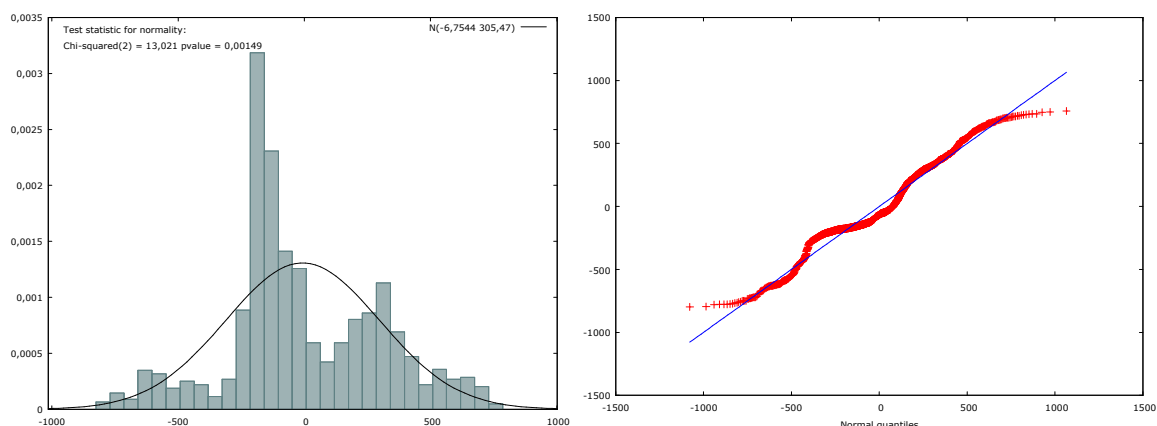
Sum squared resid	794,4247	S.E. of regression	0,599015
R-squared	0,511681	Adjusted R-squared	0,511461
F(1, 2214)	2319,924	P-value(F)	0,000000
Log-likelihood	-2007,736	Akaike criterion	4019,472
Schwarz criterion	4030,879	Hannan-Quinn	4023,639
rho	0,998517	Durbin-Watson	0,003096

Statistics based on the original data:

Mean dependent var	1181,965	S.D. dependent var	452,6993
Sum squared resid	2,07e+08	S.E. of regression	305,5416

Az 13. Táblázat megmutatja, hogy a logisztikus trend illesztése sokkal megfelelőbb a RAX adatsorára, mint a lineáris trend volt. Minden modellválasztó kritérium ezt támasztja alá, kivéve az R^2 .²⁹ Ezek a jó eredmények azonban közel sem jelentik azt, hogy ez egy jó modell.

Ha a maradékok eloszlását vizsgáljuk, akkor mind az eloszlásfüggvény, mind pedig a Q-Q plot a lineáriséhoz hasonlóan rossz képet mutat (22. ábra). Az illeszkedésvizsgálat statisztikája 13, 021, $p = 0,00149$, ami azt jelenti, hogy 0,149%-os szignifikancia mellett már nem utasítható el a normális eloszlás léte.



22. ábra: Logisztikus trend maradékainak normalitásvizsgálata

²⁹ Ez a tény azonban itt nem is lényeg, hiszen ezzel a mutatóval csak az azonos eredményváltozóval rendelkező modelleket lehet összehasonlítani.

A logisztikus trendet a heteroszkedaszticitás kiszűrése miatt szeretik a statisztikusok alkalmazni, így ebben az esetben nincs szükség a homoszkedaszticitás meglétének tesztelésére.

5.2.4 Logaritmusos trendek

Ha az árváltozás százalékos aránya a fontos számunkra, akkor semmiképpen nem érdemes lineáris formában elemezni a RAX idősort. Ezért ebben a fejezetben azt a két esetet mutatom meg, ahol a RAX adatait logaritmizálva számítottam ki a trendeket OLS eljárás segítségével.

Log-lin modell:
$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t \quad (5.4.)$$

Log-log modell:
$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln t + \varepsilon_t \quad (5.5.)$$

A fél-logaritmusos és a loglog trend abban hasonlítanak egymáshoz, hogy a becslés végrehajtásához először az eredményváltozót logaritmizálni kell. Abban viszont különböznek egymástól, hogy a loglog formát alkalmazva a magyarázóváltozót is logaritmizálni kell.

A továbbiakban minden vizsgálat eredményét együtt mutatom be a két modellre.

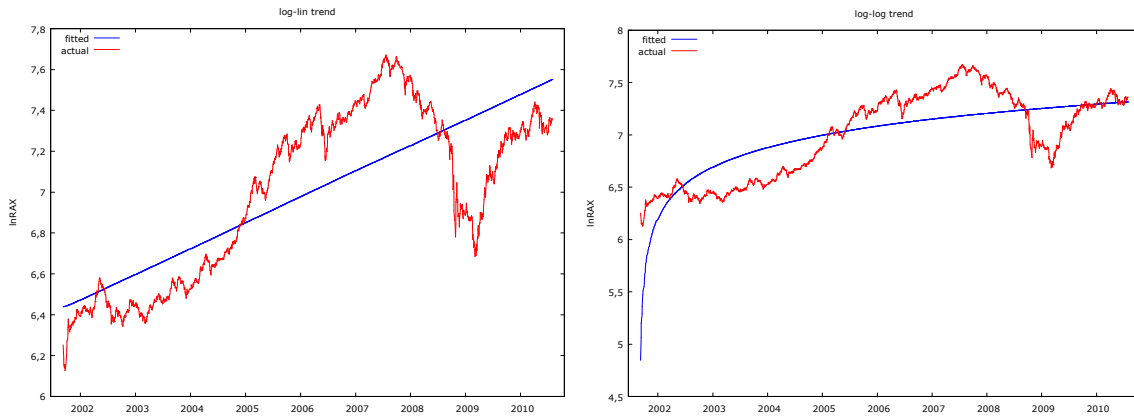
Első lépés a modellek becslése (14. Táblázat).

14. Táblázat: Log-lin és log-log trendek

	Log-lin	Log-log
const	6,438**	4,845**
	(0,01082)	(0,03758)
t	0,0005023**	
	(8,456e-06)	
lnt		0,3206**
		(0,005544)
R ²	0,6145	0,6017
lnL	-112,2	-148,3
AIC	228,3320	300,5603
HQ	232,4987	304,7270
SIC	239,7389	311,9672

Mindkét modell paraméterei 5%-os szignifikancia szint mellett már meghatározóak.

A modellválasztási kritériumok alapján a két modell közül a log-lin trend a jobban illeszkedő (23.ábra)



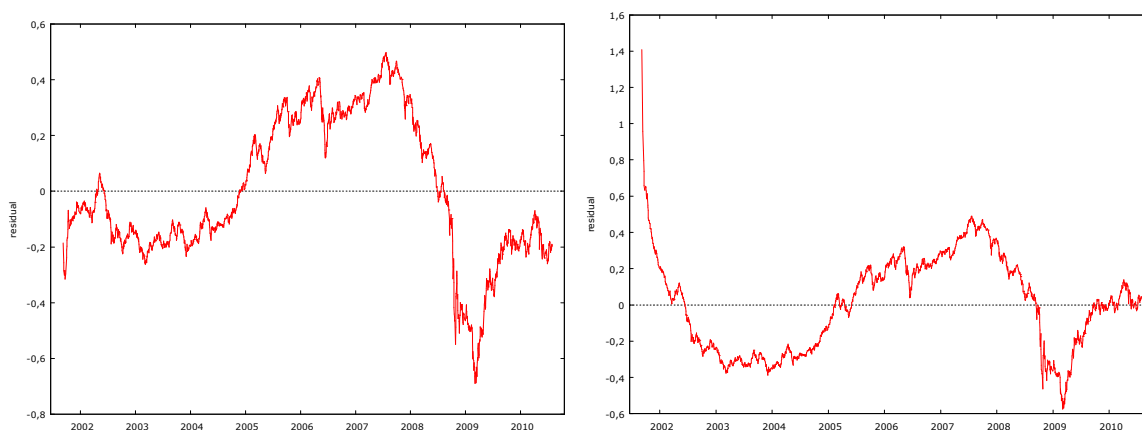
23. ábra: Log-lin és log-log trendek és a RAX

A becslés alapján az előrejelzésekhez a következő összefüggéseket kell használni:

Log-lin modell:
$$\hat{y}_t = e^{6,438 + 0,0005t + (\hat{\sigma}^2 / 2)} \quad (5.6.)$$

Log-log modell:
$$\hat{y}_t = e^{4,845} t^{0,321} e^{(\hat{\sigma}^2 / 2)} \quad (5.7.)$$

A reziduumok ábrája (24. ábra) a két modell esetében igen hasonló, ám érdemes megfigyelni, hogy az y tengelyen a skálák mások, így viszont egyértelmű, hogy a log-lin modell a megfelelőbb.



24. ábra: Log-lin és log-log trendek reziduuma

A maradékokra vonatkozó feltevések ellenőrzése során először az autokorrelációt vizsgáltam. Az már a reziduumok ábráján is jól látszik, hogy a maradéktagok a 0-tól felfelé, majd lefelé csoportosulnak. Feltételezem, a számok is alátámasztják az autokorreláció tényét.

15. Táblázat: Log-lin és log-log trendek autokorrelációjának ellenőrzése

	Log-lin	Log-log
const	0,000145422 (0,000581368)	0,0113839** (0,00480798)
t	-1,96730e-07 (4,54321e-07)	
$\ln t$		-0,00169386** (0,000709314)
$\hat{\varepsilon}_1$	1,10420*** (0,0212320)	0,854629*** (0,0212587)
$\hat{\varepsilon}_2$	-0,137608*** (0,0316489)	0,0390809 (0,0279594)
$\hat{\varepsilon}_3$	0,0417436 (0,0317821)	0,0300499 (0,0279657)
$\hat{\varepsilon}_4$	0,0557869* (0,0316603)	0,0440067 (0,0279609)
$\hat{\varepsilon}_5$	-0,0657047*** (0,0212436)	0,0261458 (0,0212535)
Korrigálatlan R^2	0,997121	0,983728
LMF	153034,148191	26709,175936
Breusch-Godfrey próba	2209,620963	2179,941304
Ljung-Box Q'	10986,1	10683,5

Várakozásaimnak megfelelően alakultak a próbák. Mindkét modell heteroszkedasztikus. Hiszen míg az *LMF* próba *F* eloszlást követ, a Breusch-Godfrey és a Ljung-Box pedig χ_p^2 ($p = 5$, mert 5 egymást követő tag közötti korrelációt vizsgáltam) eloszlást, ám egyik sem vehet fel olyan magas értékeket, mint amilyenek a próbastatisztikák lettek.

Másodjára a homoszkedaszticitás meglétét vizsgáltam. Elsőként a White teszteket készítettem el (16. Táblázat), melyhez a korrigálatlan R^2 értékére volt szükség. A minta elemszám és az R^2 szorzatából megkaptam a próbastatisztika értékét, mely mindkét esetben több százás értéket vett fel. A 2 szabadságfokú χ_2^2 eloszlásból a kritikus érték jelentősen kisebb, így tehát heteroszkedaszticitás esete áll fenn.

16. Táblázat: Log-lin és log-log trendek maradékainak White tesztje

	Log-lin	Log-log
const	-0,0206170***	0,981468***
t	0,000134550***	
t^2	-3,89161e-08***	
$\ln t$		-0,301183***
$(\ln t)^2$		0,0240502***
Korrigálatlan R^2	0,219170	0,348294
nR^2	485,680383	771,820019

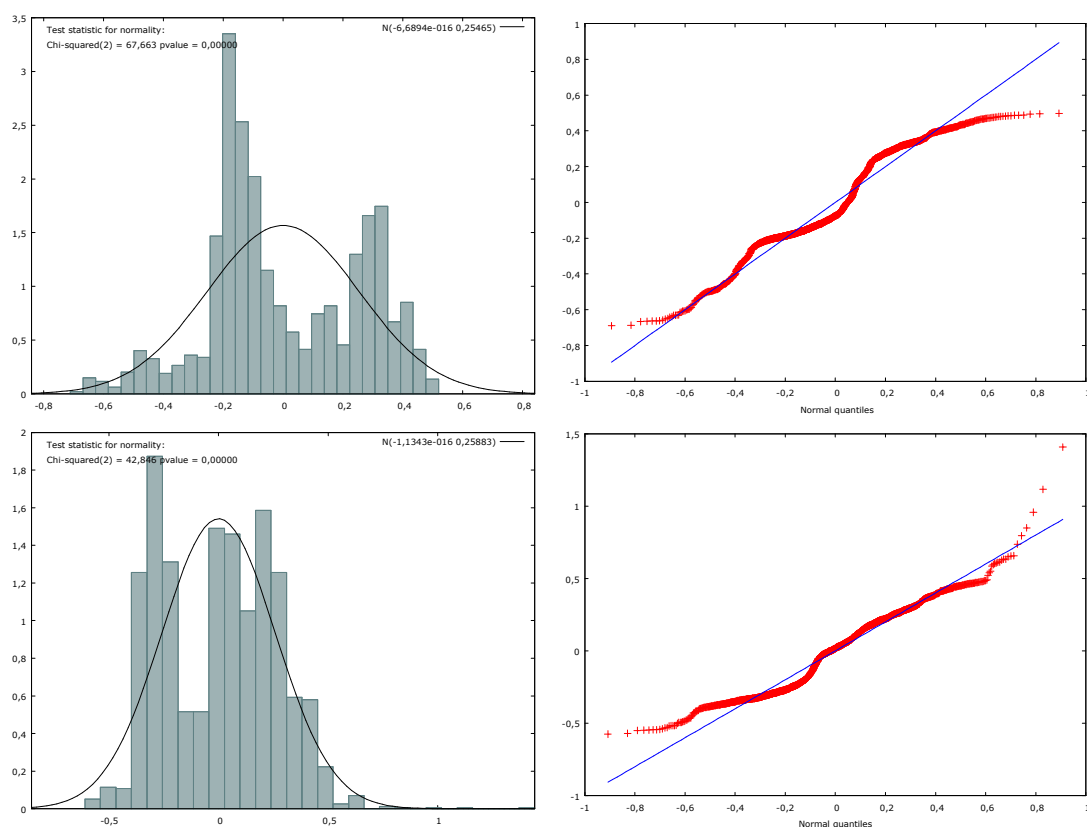
Ugyanerre az eredményre jutottam a másik homoszkedaszticitásra vonatkozó próbával. A Breusch-Pagan teszt (17. Táblázat) szintén χ_1^2 eloszlást követ, ám 1 a szabadságfoka, s így itt sem lehet elfogadni a H_0 alaphipotézist.

A próbákhoz tartozó segédregressziók paraméterei mindkét próbánál csak 1%-os szinten voltak szignifikánsak.

17. Táblázat: Log-lin és log-log trendek maradékainak Breusch-Pagan tesztje

	Log-lin	Log-log
const	0,174058*** (0,0431514)	3,41951*** (0,174425)
t	0,000745099*** (3,37163e-05)	
$\ln t$		-0,360818*** (0,0257319)
SSR	503,449	283,774
$LM = \frac{SSR}{2}$	251,724681	141,887052

Harmadjára maradt a normalitás vizsgálata. A legegyszerűbb módszer a reziduumok eloszlásának felrajzolása (amit ismét 29 osztásközzel készítettem), és a Q-Q plot elkészítése (25. ábra). Mindkét grafikus eszköz azt mutatja, hogy ezúttal sem teljesül a normalitás.



25. ábra: Log-lin és log-log trendek reziduum eloszlása és Q-Q plotja

A vizuális élményt természetesen számokkal is alátámasztottam. A log-lin trendnek 67,663, a log-log trendnek pedig 42,846 lett az illeszkedésvizsgálat során számított statisztikája. Az eloszlás 2 szabadságfokú χ^2_2 eloszlás, melynek a legkisebb 0,1%-os szignifikancia mellett is csak 10,6 az értéke, és így mindkét trend esetében elutasítható a H_0 alaphipotézis, azaz a reziduumok eloszlása nem normális.

5.2.5 Determinisztikus trendek összefoglalása

Mint az a korábbi fejezetekben látható volt, egyik általánosan használt trend sem írta le megfelelően a RAX 9 éves idősorát. Valamennyinél megfigyelhető volt, hogy az OLS eljárás előfeltételei, azaz a maradéktagok autokorrelálatlansága, homoszkedaszticitása és normális eloszlása nem teljesült. Ezek a problémák azonban orvosolhatóak.

Az eltérések okait és kiküszöbölésük módját nem szeretném valamennyi függvénytípusra elvégezni, ezért most a bemutatott nyolc trend közül szeretném a legjobban illeszkedőt kiválasztani és csak azt elemezni tovább. A 18. Táblázat megmutatja az elemzett trendek főbb paramétereit és a modellszelekciós kritériumokat.

18. Táblázat: Determinisztikus trendek összefoglaló táblázat

	Lineáris	Kvadratikus	Harmadfokú	Negyedfokú	Ötödfokú	Logisztikus	Log-lin	Log-log
const	607,711	235,5**	522,5**	920,4**	480,0**	-1,04669	6,438**	4,845**
t	0,518046	1,525**	-0,02671	-3,609**	2,332**	0,000958	0,0005**	
t^2		-0,000454**	0,001295**	0,008563**	-0,01018**			
t^3			-5,260e-7**	-5,624e-6**	1,691e-5**			
t^4				1,150e-9**	-1,028e-8**			
t^5					2,063e-12**			
$\ln t$								0,3206**
R^2	0,5359	0,6707	0,7278	0,8129	0,8980	0,5114	0,6145	0,60
$\ln L$	-15844,1	-15460,0	-15250,0	-14840,0	-14160,0	-2007,73	-112,2	-148,3
AIC	31692,20	30932,77	30512,11	29681,94	28339,76	4019,47	228,33	300,56
HQ	31696,36	30939,02	30520,44	29692,35	28352,26	4023,63	232,50	304,73
SIC	31703,61	30949,88	30534,92	29710,45	28373,98	4030,87	239,73	311,97

A modellválasztási kritériumok közül a korrigált R^2 csak akkor működik, ha azonos eredményváltozós modelleket hasonlítunk össze, vagyis az első 5, majd pedig az utolsó kettő hasonlítható össze, de mind a nyolc nem. Ha meg kell mondani, hogy melyik a legjobb, akkor az ötödfokú polinom és a log-lin közül kellene választani.

A log-likelihood becslés és a többi modellválasztási kritérium alapján sem tudok könnyebben dönteni, hiszen itt is ugyanezzel a problémával nézek szembe, mint az R^2 esetében. A trendek ábrázolásakor azt tapasztaltam, hogy az ötödfokú polinom írta le legjobban az idősort, így amellett döntöttem, hogy ezt nevezem ki a determinisztikus trendszámításom alapjának.

A továbbiakban tehát az ötödfokú polinomot tekintem a kiindulási modellemnek. Első lépésben megszüntetem azokat a hibákat, amelyek az OLS becslés során nem kerültek kiküszöbölésre, majd pedig megvizsgálom a rövidebb távú hatások (konjunktúra, szezonhatás) meglétét.

5.2.6 Ciklus hatás kiszűrése

A determinisztikus trendek közül az ötödfokú polinom közelítette meg legjobban a RAX idősortát a 2001. szeptember 7.- 2010. július 29. közötti időszakra. Így a továbbiakban ezt a modellt fogom tovább elemezni, s ez alapján készítem el az első előrejelzésemet is.

A heteroszkedaszticitás egyik oka lehet az autokorreláció fennállása. Így első lépésben az autokorrelációt szüntettem meg. A becslése eredményeként kapott adatok (19. Táblázat) között szerepel az elsőfokú autokorreláció tesztelésére alkalmas DW próba értéke. Ez a statisztika itt igen alacsony, nullához közeli értéket vett fel, ami azt jelenti, hogy erős pozitív autokorreláció áll fenn a két egymás utáni maradéktag között.

19. Táblázat: Ötödfokú polinom becslése

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>	
const	479,979	18,5051	25,9377	<0,00001	***
t	2,33194	0,168535	13,8366	<0,00001	***
t2	-0,0101787	0,000470808	-21,6196	<0,00001	***
t3	1,69104e-05	5,38301e-07	31,4145	<0,00001	***
t4	-1,0284e-08	2,67645e-010	-38,4242	<0,00001	***
t5	2,06295e-012	0	42,9354	<0,00001	***

Mean dependent var	1181,965	S.D. dependent var	452,6993
Sum squared resid	46217495	S.E. of regression	144,6129
R-squared	0,898185	Adjusted R-squared	0,897954
F(5, 2210)	3899,194	P-value(F)	0,000000
Log-likelihood	-14163,88	Akaike criterion	28339,76
Schwarz criterion	28373,98	Hannan-Quinn	28352,26
rho	0,995035	Durbin-Watson	0,012641

Az autokorreláció megszüntetésére alkalmazható eljárások közül nem a Cochrane-Orcutt féle iteratív eljárást (CORC) választottam, annak ellenére, hogy az adatoknál a DW statisztika mellett szerepel az eljárás elvégzéséhez szükséges $\hat{\rho}$ érték. A döntésemet nem azért hoztam, mert félek, hogy az első tag elveszne (hiszen még mindig maradna 2215 megfigyelés), hanem azért, hogy a CORC eljárás során nehezen esetleg elkerülhessem az $SSE(\rho)$ globális minimumát.

A Prais-Winsten eljárás az egyik továbbfejlesztése a CORC-nak, amelynél nem veszik el a minta első eleme.

20. Táblázat: Prais-Winsten eljárás eredménye

Performing iterative calculation of rho...

ITER	RHO	ESS
1	0,99503	581229
2	0,99476	581229

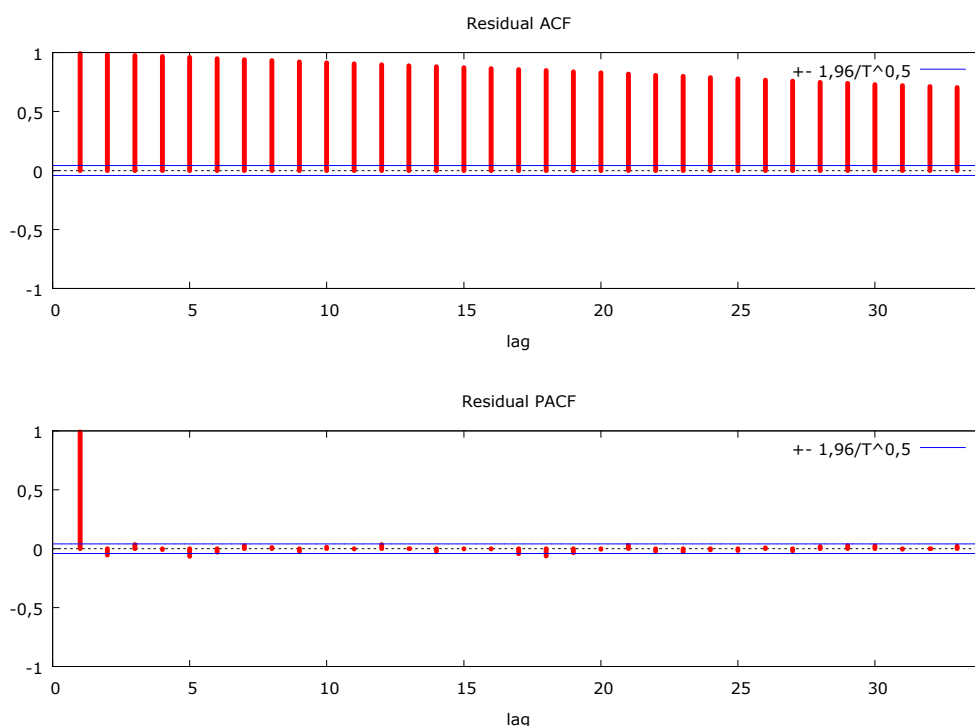
	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>	
const	526,123	158,934	3,3103	0,00095	***
t	1,16961	1,37265	0,8521	0,39426	
t2	-0,00544026	0,00425859	-1,2775	0,20157	
t3	1,02329e-05	5,11031e-06	2,0024	0,04536	**
t4	-6,48947e-09	2,58237e-09	-2,5130	0,01204	**
t5	1,3161e-012	4,62914e-013	2,8431	0,00451	***

Statistics based on the rho-differenced data:			
Mean dependent var	1181,965	S.D. dependent var	452,6993
Sum squared resid	581224,1	S.E. of regression	16,21719
R-squared	0,998720	Adjusted R-squared	0,998717
F(5, 2210)	10,09935	P-value(F)	1,41e-09
rho	0,063331	Durbin-Watson	1,873280

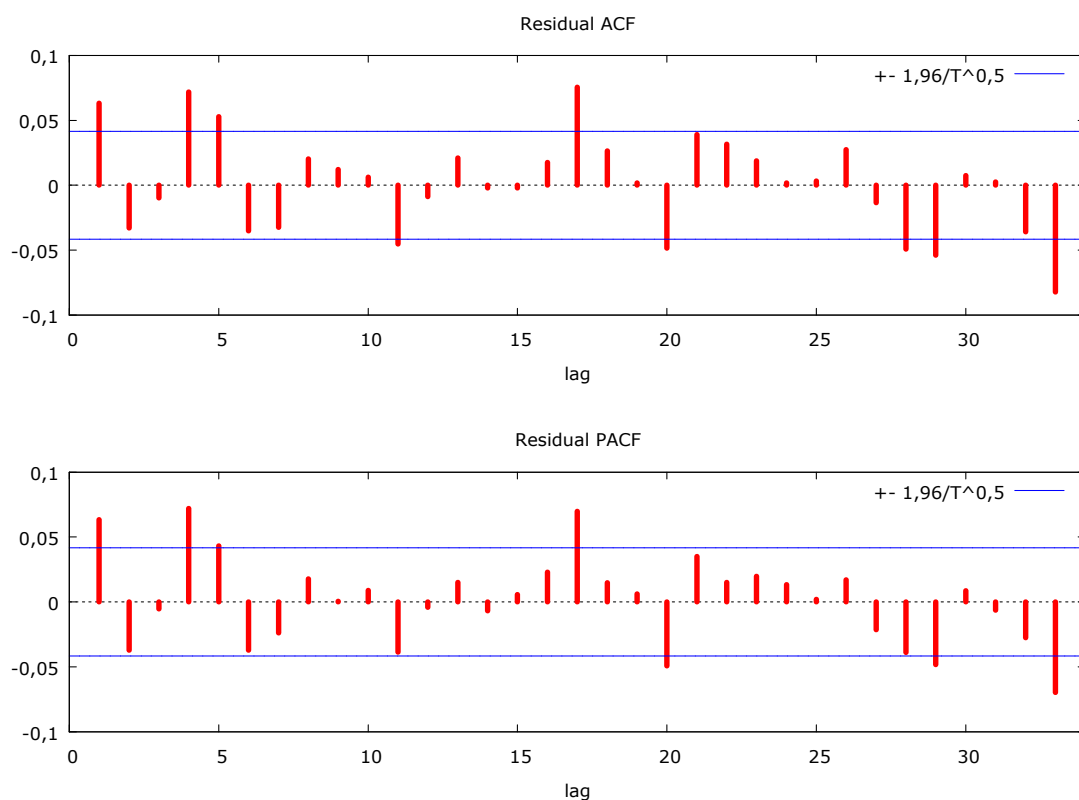
A 20. Táblázatból látszik, hogy két iterációs lépésre volt szükség a $\hat{\rho}$ értékének meghatározásához, mely így 0,99476 lett, míg a maradékok eltérés négyzetösszege 581229.

A PW regresszióval becsült modell paraméterei néhol jelentősen eltérnek az eredeti modell paramétereitől, ám a szignifikanciájuk is eltérő. Amíg az eredeti modellnél minden paraméter csak legfeljebb 1%-os szinten volt szignifikáns, addig itt a t és t^2 minden szinten, a t^3 és t^4 pedig 5%-on is szignifikánsnak mondható és csak a konstans és a t^5 lett 1%-os szintű.

A DW statisztika értéke jól mutatja, hogy sikerült az elsőrendű autokorrelációt kiküszöbölni. Erre utal a maradékok ACF és PACF függvénye is (27. ábra), melyek mindketten szinuszosan csökkennek, míg az eredeti becslésnél a PACF egyértelmű elsőrendű autokorreláció jelét mutatta (26. ábra).



26. ábra: Ötödfokú polinom ACF és PACF függvényei

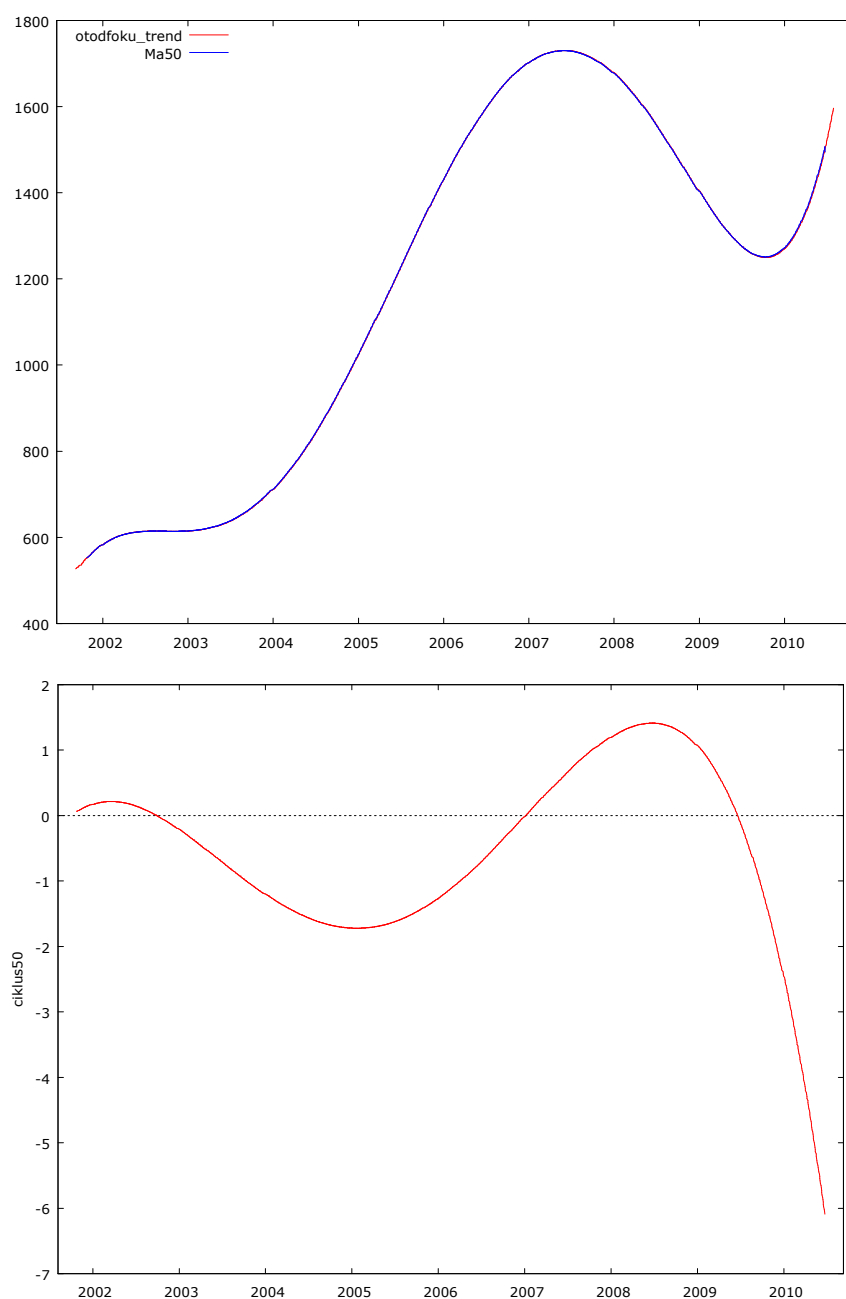


27. ábra: Ötödfokú trend ACF és PACF függvénye PW regresszió után

Az autokorrelációval együtt a heteroszkedaszticitás problémája is megszűnt, így elkezdhetem az idősor következő elemének a kiszűrését.

A ciklus értékének meghatározáshoz mozgóátlagolni kell az ötödfokú trendet. Az átlagolás fokszámának eldöntésében az segített, hogy a tőzsdén a technikai elemzéseknél milyen mozgóátlagot számítanak. Ott az 50 és a 200 napot mozgóátlaggal dolgoznak.

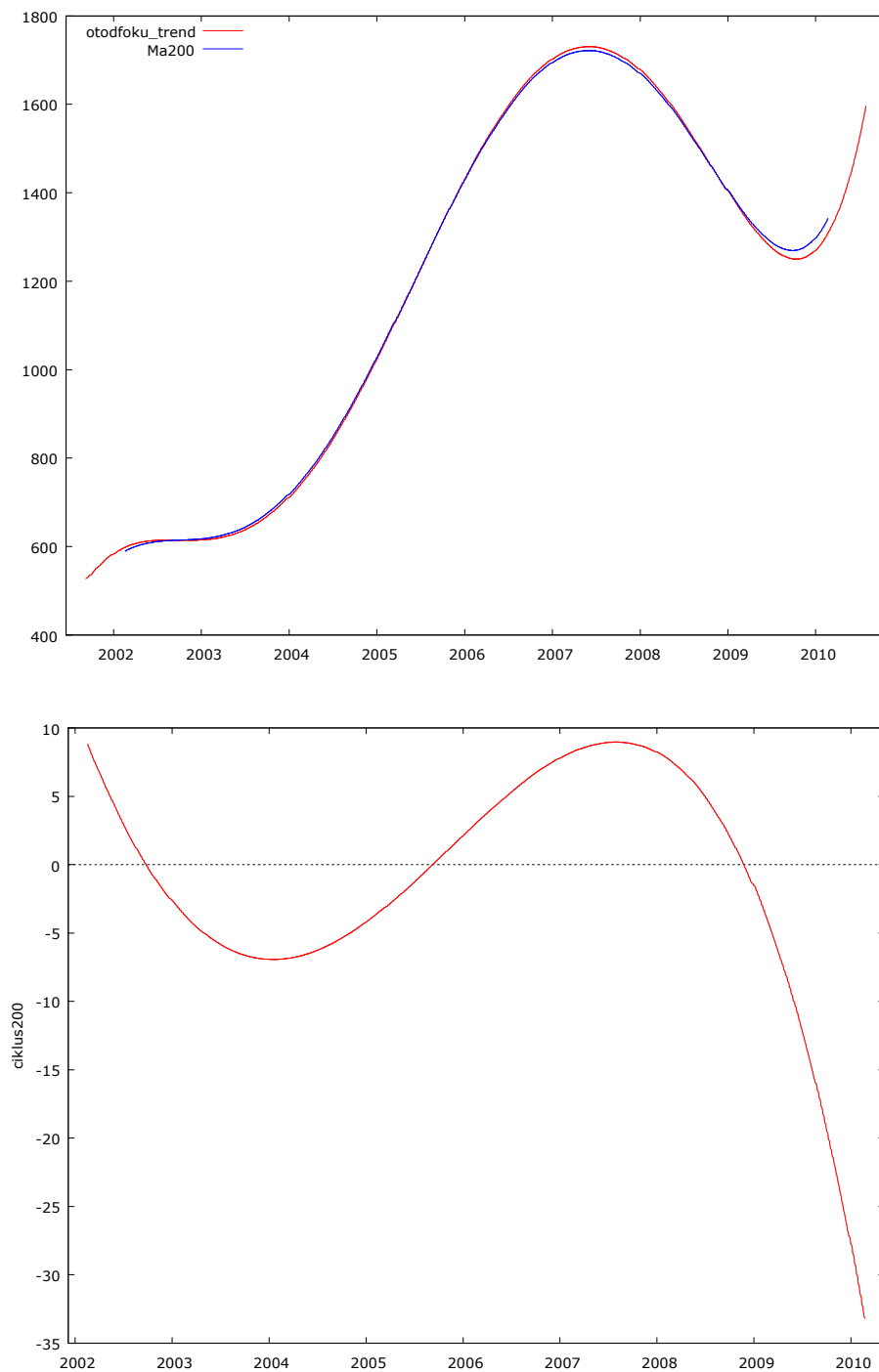
A következő lépés az ötödfokú trend és a mozgóátlagolt trend különbségének meghatározása. Amit ezáltal kapunk az nem más, mint a ciklus nagysága.



28. ábra: Ötödfokú polinom, 50 tagú mozgóátlag és a ciklus

A 28. ábra felső része az 50 tagú mozgóátlaggal képzett trendet mutatja, illetve az alsó része az ennek segítségével kapott ciklust. Az ábra alapján azt látjuk, hogy egy teljes ciklus zajlott le 2002. szeptember 27-től 2009. június 19-ig, azaz egy majdnem 7 éves ciklus figyelhető meg. Sajnos korábbi adatok hiányában nem tudom ellenőrizni, hogy ezen az egy teljesen cikluson kívül volt-e másik is a RAX történetében.

A 200 taggal képzett mozgóátlag ábrája hasonló képet mutat, mint az 50 tagosé (288. ábra). Jól látható, hogy mekkora késleltetést jelent a 200 tag, mennyivel később követi a trend mozgását. A kimutatott ciklus itt már csak 6 éves, 2002. szeptember 25-én indul és 2008. november 25-én fejeződik be.

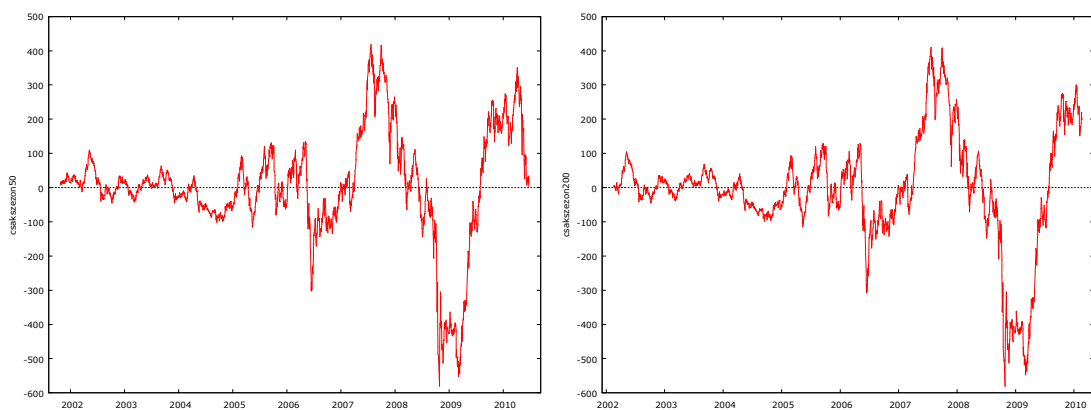


29. ábra: Ötödfokú polinom, 200 tagú mozgóátlag és a ciklus

5.2.7 Szezonális hatás kiszűrése

A RAX idősort vizsgálva 2001. szeptember 7. és 2010. július 29. között már meghatároztam egy ötödfokú trendet, mely a leginkább alkalmazott függvénytípusok közül a legjobban írja le a megfigyelt adatokat. Második lépésben kiszűrtem a konjunktúrahatalás nagyságát. Még egy tag kiszűrése maradt hátra. Ez pedig a szezonális hatás.

Ábrázolva a trendtől és ciklustól megtisztított RAX adatokat azt láthatjuk (30. ábra), hogy 0 körül mozognak az egyedi szezonális eltérések.



30. ábra: Csak szezonális hatást tartalmazó adatok (50es és 200as mozgóátlagból számítva)

A szezonális eltérést nemcsak hónapokra készítettem el, hanem negyedévekre is, hiszen a tőzsdék életében egy-egy gazdasági negyedév lezárása jelentős változásokat hozhat.

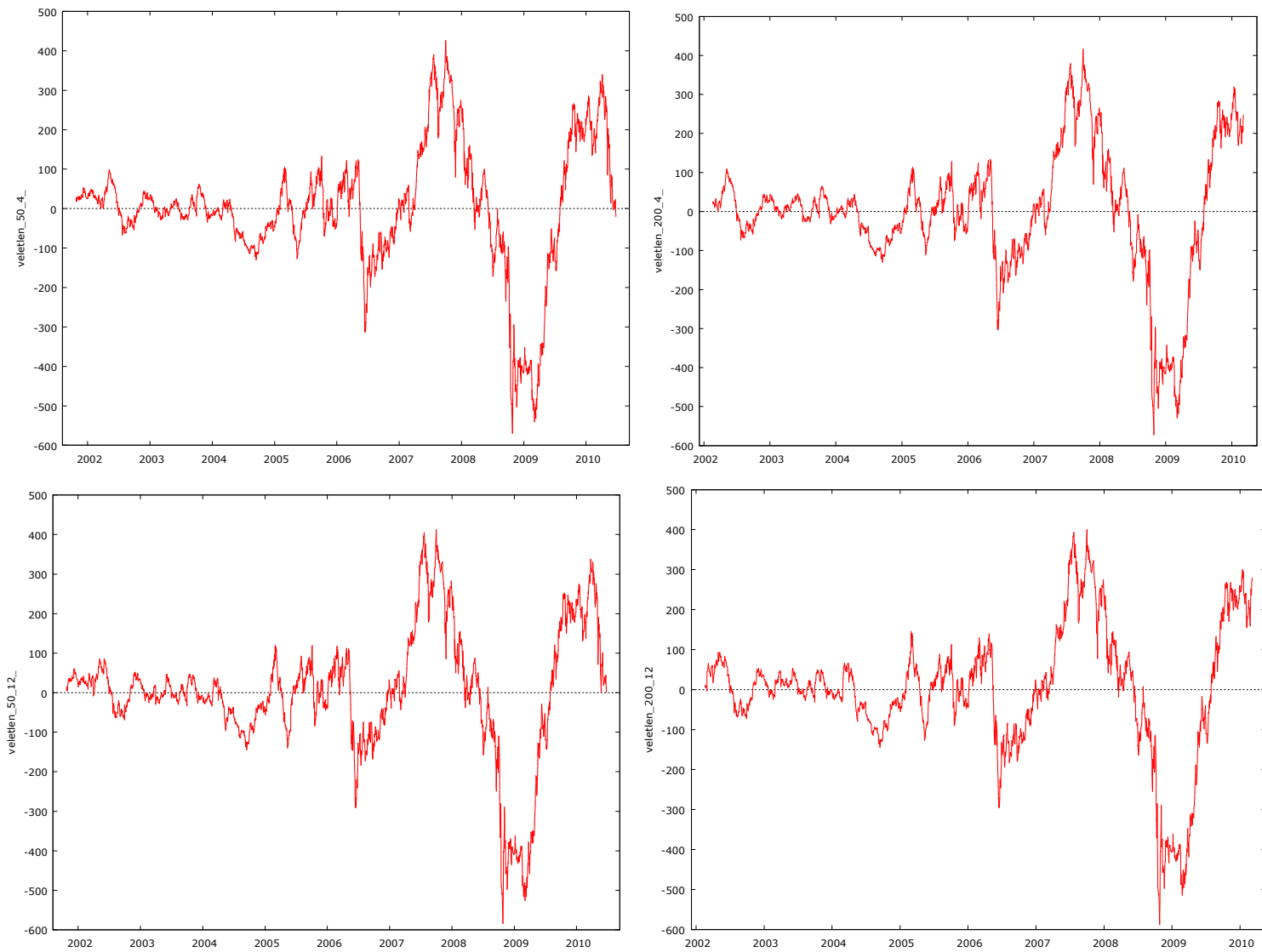
Mind az 50es mozgóátlagú, mind a 200as mozgóátlagú trenddel szűrt soroknál szükség volt a korrekcióra a havi és a negyedéves szezonszámításnál is, mert a szezonális eltérések összege nullától igencsak eltért (21. Táblázat).

21. Táblázat: Negyedéves szezonális eltérés adatok (50es és 200as mozgóátlagra)

	I.	II.	III.	IV.	Σ
s_j	-12,58	10,32	27,36	-10,80	14,29
$\tilde{s}_j$	-16,16	6,75	23,79	-14,38	
s_j	-21,92	-7,74	28,01	-11,47	-13,11
$\tilde{s}_j$	-18,64	-4,46	31,29	-8,19	

A korrigált szezoneltérés értékét kivonva az idősor még meglévő részéből megkaptam a maradékot. Ezeket ábrázoltam és reméltem, hogy nem fogok semmi szabályosságot találni benne, mert akkor az azt jelentené, hogy minden lehetséges tényezőt figyelembe vettem. A maradékok ábrája a 31. ábra, ahol az 50es mozgóátlaggal számított adatok negyedéves, havi illetve a 200as mozgóátlaggal számított adatok negyedéves és havi maradéktagjai látszanak.

A 31. ábra egyértelműen megmutatja, hogy valószínűleg sikerült minden hatást kiszűrni az idősorból. Azonban a maradéktagok még így is tartalmazhatnak valamilyen plusz információt. Erre utal, hogy mind a négy véletlen esetnél elsőrendű autokorreláció áll fenn a tagok között.



31. ábra: Maradéktagok (50,4; 50,12; 200,4; 200,12)

5.3 Új típusú spline-ok

Determinisztikus vizsgálataim során az ötödfokú polinom elemzéséig jutottam el. Elképzelhető, hogy magasabb fokszám esetén egy jobb modellt lehetne felépíteni, azonban korántsem biztos, hogy találnék egy az ötödfokúnál jobb polinomiális trendet. Éppen ezért inkább a polinomok egy speciális formája felé szeretnék tovább haladni. A *köbös spline*-t választottam, amely harmadfokú polinomok illeszkedő sorozata. A spline képes a megfigyelt adatokra olyan módon trendet illeszteni, hogy ne legyen túl nagy az interpolációból eredő oszcilláció.

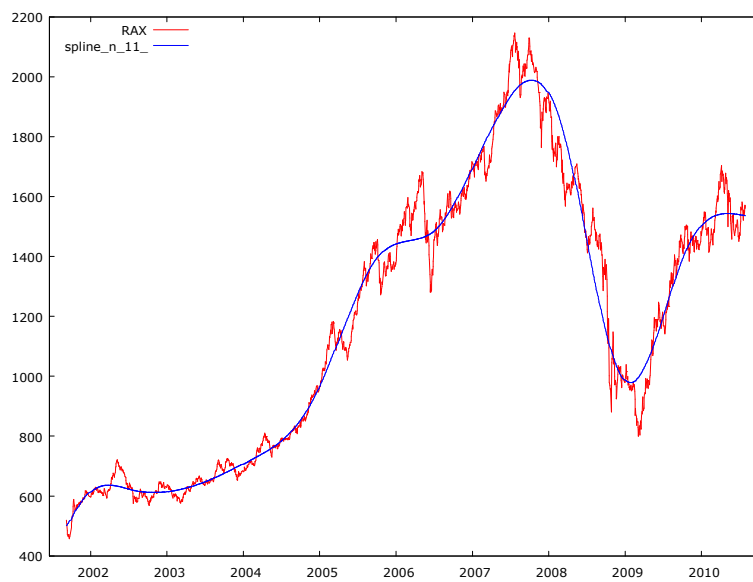
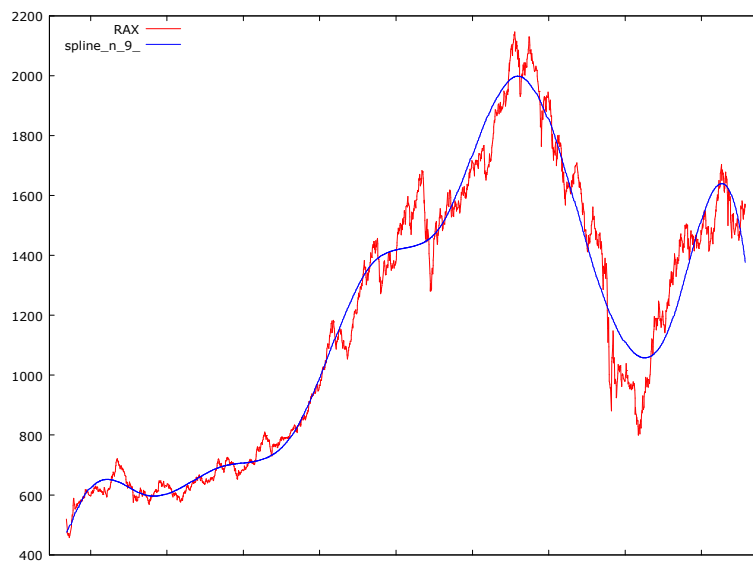
Spline ezen új típusánál első lépésben megállapítottam a felosztások számát. Három különböző felosztást határoztam meg:

1. Egy olyat, ahol 9 osztásközöm volt, azaz a 2216 időpontomat 9 db harmadfokú görbéből álló trenddel írtam le. Ez egy durván éves adatokra illesztett spline volt.
2. A másodikonál a tőzsdén kiemelt jelentőségű 200 napnak megfelelően 11 darab görbéből állt a trend.
3. Az utolsó esetben az 50 napot figyelembe véve 44 osztás, azaz 44 darabból álló trend keletkezett.

Mindhárom esetben minimum két iterációra volt szükség ahhoz, hogy egy jól illeszkedő trendet kapjak.

A spline-ok felhasználása a determinisztikus trendszámításban a „hagyományos” függvényformák illesztését helyettesíti. A trend meghatározása után azonban itt is a ciklus, szezon és véletlen hatások meghatározása következett.

A 32. ábra jól mutatja, hogy a felosztások számának növelésével egyre jobban illeszkedő trendet kaptam. Ezt a tényt támasztja alá számokkal a 22. Táblázat, ahol az eltérés négyzetösszegek és a trendek abszolút hibái szerepelnek az ötödfokú polinom és a különböző spline-trendek esetében.



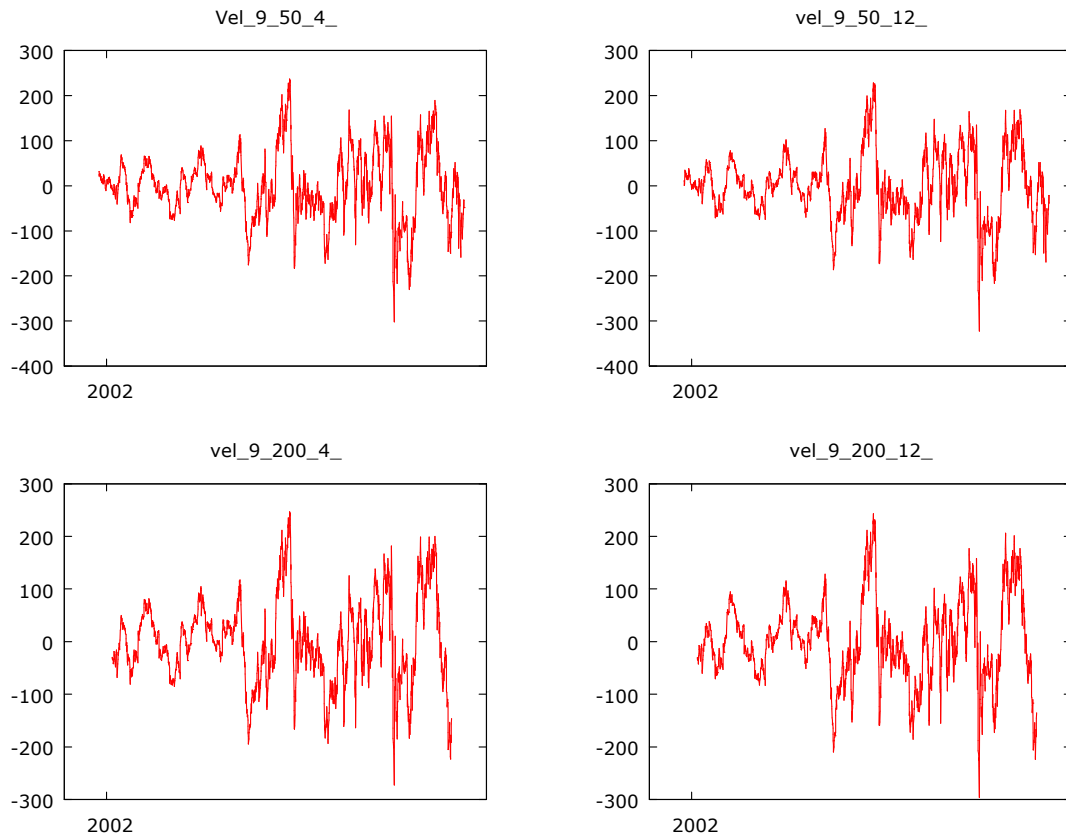
32. ábra: 9, 44 és 11 spline-ból épített trend

22. Táblázat: A determinisztikus trendek hibái

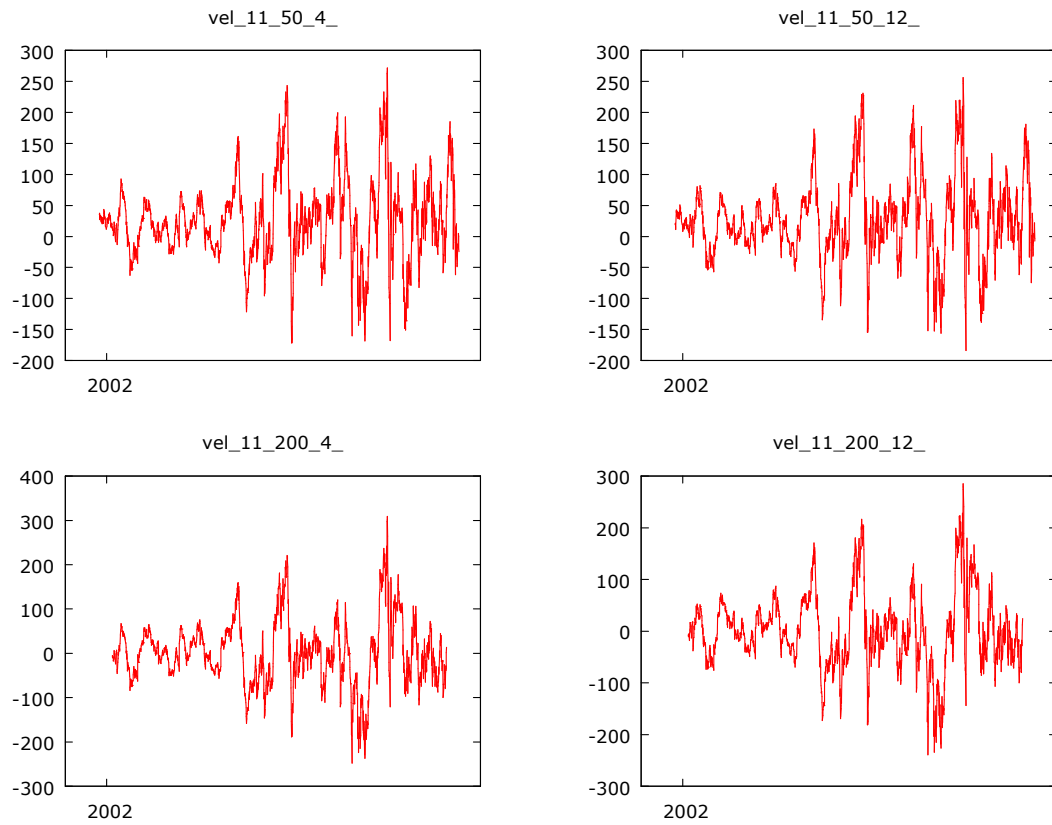
mutató	ötödfokú polinom	spline		
		N=9	N=11	N=44
SSE	55220330	13685822	9847620	4190320
szórás	157,9286	78,62246	66,69248	43,50456

A ciklusok kimutatásánál ismételten a tőzsdei gyakorlatnál bevált 50 és 200 elemű mozgóátlagokat számítottam először, majd az így kapott mozgóátlagú trendet kivontam a spline-trendből. A ciklusok sajnos nem mutattak semmi olyan érdekeset, mint az ötödfokú polinomból számított trend. A szezonális értékének meghatározás ebben az esetben is negyedéves és havi bontásban is megtörtént. A trend, ciklus és szezon-hatások kiszűrése után megmaradt a véletlen. A 33. ábra, a 34. ábra és a 35. ábra mutatja ezen véletlenek értékeit. Látható, hogy az azonos tagszámú spline-hoz tartozó véletlenek hasonló lefutásúak minden mozgóátlag tagszám és szezonszám esetén.

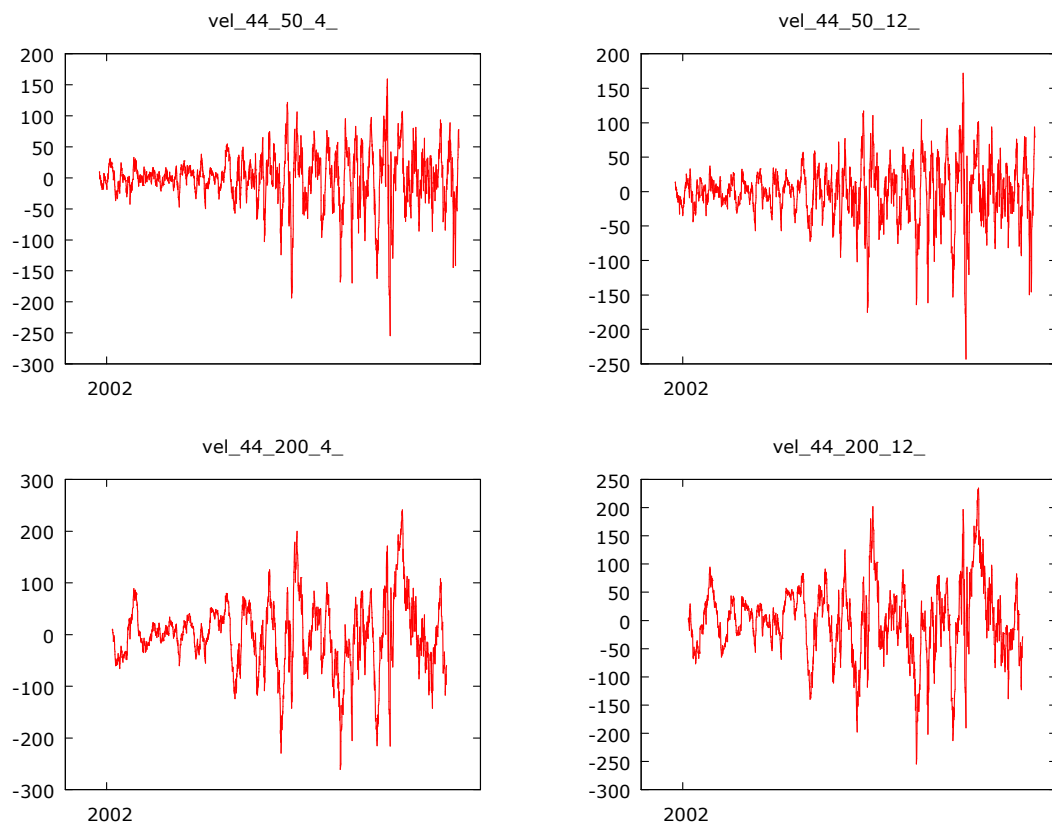
A véletlenek esetében megvizsgáltam, hogy maradt-e még valamilyen ki nem szűrt hatás. Csakúgy, mint a másik determinisztikus szemléletű vizsgálatnál, itt is kimutatható elsőrendű autokorreláció.



33. ábra: 9 tagú spline-nal képzett trendek véletlen tagjai



34. ábra: 11 tagú spline-nal képzett trendek véletlen tagjai



35. ábra: 44 tagú spline-nal képzett trendek véletlen tagjai

5.4 A RAX ARMA modellje

A RAX idősorának elemzése során az első vizsgálat, amit elvégeztem a determinisztikus idősorelemzés volt. Az idősorelemzés ezen típusánál a véletlennek igen kis szerepet tulajdonítanak, szemben a sztochasztikus elemzéssel, ahol fontos a véletlen.

A sztochasztikus modellek egy nagy családját az *ARMA* modellek jelentik, melyet Box-Jenkins modelleknek is nevezünk a módszert kitaláló két statisztikus után. Az eljárás során 3 lépést kell végrehajtani, szükség estén megismételve az első kettőt. Vizsgálatom során én is ezeket a lépéseket követem.

A tőzsdén technikai elemzések során mindig a logaritmizált adatokkal dolgoznak, mert az így módon meghatározott adatoknak több közgazdasági jelentése van. Így elemzésem során én is a RAX idősorának természetes alapú logaritmusára határozom meg az *ARMA* modellt.

5.4.1 Identifikáció

A feladatomban ebben a lépésben az $ARMA(p, q)$ folyamat paramétereinek előzetes becslése. Ehhez azonban először ellenőrizni kell, hogy az adatsor stacionárius-e. A két legelterjedtebb próbát, az ADF és a KPSS, végeztem el a stacionaritás vizsgálatára.

Az ADF-nél megvizsgáltam azt az esetet, amikor csak konstans van (23. Táblázat), amikor konstans és trend (24. Táblázat), illetve amikor konstans és négyzetes trend van (25. Táblázat). Mindhárom alkalommal 8 tagú késleltetéssel számoltam. Minden esetben azt kaptam eredményül, hogy a H_0 alaphipotézist el kell fogadnom, azaz az idősor véletlen bolyongás.

23. Táblázat: ADF teszt konstans taggal

sample size 2207

unit-root null hypothesis: $a = 1$

test with constant

model: $(1-L)y = b_0 + (a-1)y(-1) + \dots + e$

1st-order autocorrelation coeff. for e: -0,003

lagged differences: $F(8, 2197) = 5,225$ [0,0000]estimated value of $(a - 1)$: -0,00115845test statistic: $\tau_c(1) = -1,7156$

asymptotic p-value 0,4234

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value	
const	0,00857433	0,00473368	1,811	0,0702	*
l_RAX_1	-0,00115845	0,000675246	-1,716	0,4234	
d_l_RAX_1	0,0715108	0,0212417	3,367	0,0008	***
d_l_RAX_2	-0,0322602	0,0212528	-1,518	0,1292	
d_l_RAX_3	0,00905547	0,0212369	0,4264	0,6699	
d_l_RAX_4	0,0703542	0,0212186	3,316	0,0009	***
d_l_RAX_5	0,0419257	0,0212148	1,976	0,0483	**
d_l_RAX_6	-0,0305781	0,0212199	-1,441	0,1497	
d_l_RAX_7	-0,0506370	0,0212101	-2,387	0,0171	**
d_l_RAX_8	0,0239391	0,0210588	1,137	0,2558	

A 23. Táblázat megmutatja, hogy a számított statisztika értéke negatív lett (-1,7156), mely a Dickley-Fuller táblázatból kikeresett kritikus értéknél kevesebb, hiszem a p érték 0,4234, azaz minden szokásos szignifikancia szinten el kell utasítani az alaphipotézist.

24. Táblázat: ADF teszt konstans és trend jelenlétében

sample size 2207

unit-root null hypothesis: $a = 1$ model: $(1-L)y = b_0 + b_1*t + (a-1)y(-1) + \dots + e$

1st-order autocorrelation coeff. for e: -0,003

lagged differences: $F(8, 2196) = 5,237$ [0,0000]estimated value of $(a - 1)$: -0,00150313test statistic: $\tau_{ct}(1) = -1,38586$

asymptotic p-value 0,8653

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value	
const	0,0106705	0,00700390	1,524	0,1278	
l_RAX_1	-0,00150313	0,00108462	-1,386	0,8653	
d_l_RAX_1	0,0718005	0,0212577	3,378	0,0007	***
d_l_RAX_2	-0,0319866	0,0212675	-1,504	0,1327	
d_l_RAX_3	0,00931797	0,0212507	0,4385	0,6611	
d_l_RAX_4	0,0706348	0,0212339	3,327	0,0009	***
d_l_RAX_5	0,0422300	0,0212321	1,989	0,0468	**
d_l_RAX_6	-0,0302701	0,0212374	-1,425	0,1542	
d_l_RAX_7	-0,0503400	0,0212268	-2,372	0,0178	**
d_l_RAX_8	0,0242509	0,0210768	1,151	0,2500	
time	2,82623e-07	6,95876e-07	0,4061	0,6847	

25. Táblázat: ADF teszt konstans és négyzetes trend jelenlétében

sample size 2207

unit-root null hypothesis: $a = 1$

model: $(1-L)y = b_0 + b_1*t + b_2*t^2 + (a-1)*y(-1) + \dots + e$
 1st-order autocorrelation coeff. for e: -0,003
 lagged differences: $F(8, 2195) = 5,264$ [0,0000]
 estimated value of $(a - 1)$: -0,00233481
 test statistic: $\tau_{ctt}(1) = -1,66113$
 asymptotic p-value 0,9171

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value	
const	0,0152613	0,00856773	1,781	0,0750	*
l_RAX_1	-0,00233481	0,00140555	-1,661	0,9171	
d_l_RAX_1	0,0723111	0,0212654	3,400	0,0007	***
d_l_RAX_2	-0,0314345	0,0212765	-1,477	0,1397	
d_l_RAX_3	0,00978303	0,0212573	0,4602	0,6454	
d_l_RAX_4	0,0711171	0,0212408	3,348	0,0008	***
d_l_RAX_5	0,0428046	0,0212417	2,015	0,0440	**
d_l_RAX_6	-0,0297127	0,0212465	-1,398	0,1621	
d_l_RAX_7	-0,0498528	0,0212339	-2,348	0,0190	**
d_l_RAX_8	0,0246406	0,0210816	1,169	0,2426	
time	2,73590e-06	2,72719e-06	1,003	0,3159	
timesq	-9,14268e-010	9,82701e-010	-0,9304	0,3523	

A KPSS teszt alapfeltevése éppen ellenkező az ADF-el, vagyis a stacionaritás, így ha az eredményeim nem mondanak egymásnak ellent, akkor a szintén 8 késleltetéssel számított teszt során az alaphipotézist el kell utasítanom. Amint az a 26. táblázatban látható, a tesztstatisztika értéke 4,1156, míg a kritikus érték legfeljebb 0,216, így valamennyi szignifikancia szinten el kell utasítani a H_0 -t és helyette az ellenhipotézis azon állítása az igaz, hogy a RAX időszora véletlen bolyongás.

26. Táblázat: KPSS teszt 8 késleltetéssel

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value	
const	6,43796	0,0108226	594,9	0,0000	***
time	0,000502349	8,45624e-06	59,41	0,0000	***

Robust estimate of variance: 0,579928

Sum of squares of cumulated residuals: 1,17205e+007

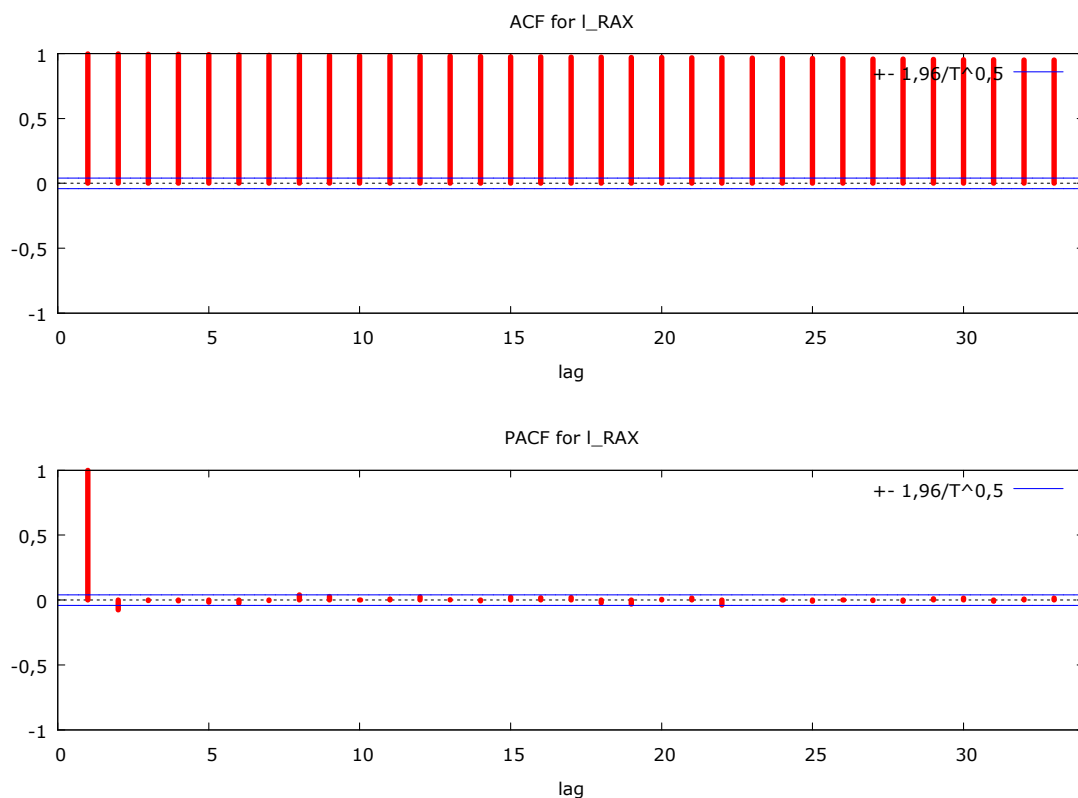
Lag truncation parameter = 8

Test statistic = 4,1156

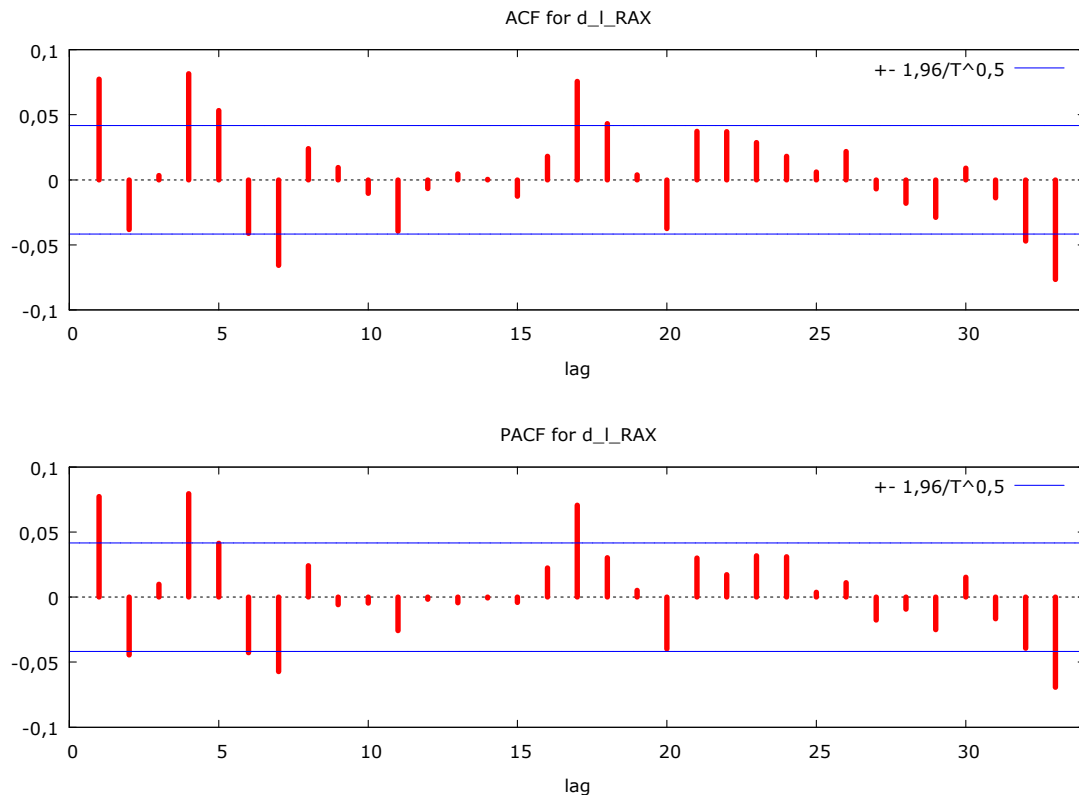
Critical values: 10% 0,119 5% 0,146 2,5% 0,176 1% 0,216

Miután mind a két teszt azt az eredményt hozta, hogy a vizsgált adatsor nem stacionárius, így először ezt kell megszüntetni, s csak aztán lehet folytatni az elemzést. A stacionaritás differenciálással könnyen elérhető. A differenciálás fokának meghatározáshoz segítséget nyújthat az ACF függvény ábrázolása. Addig van szükség differenciálásra, amíg a korrelogram csak lassan csökken.

Az 36. ábraán is látszik, amit a stacionaritás vizsgálatnál már kimutattam, azaz szükség van a differenciálásra. Az elsőrendű differenciálás utáni ACF függvény (37. ábra) viszont már nem lassan csökkenő, így elvileg már nincs szükség több differenciálásra. A KPSS teszt is ezt igazolja. A tesztstatisztika értéke 0,0993414 lett, míg a kritikus értékek közül a 10%-os szignifikancia szint melletti érték 0,119, az 5%-os 0,146, míg az 1%-os 0,216. Ebből következik, hogy a stacionaritás alaphipotézisét minden szokásos szignifikancia szinten elfogadhatjuk.



36. ábra: A RAX korrelogramja és parciális korrelogramja



37. ábra: Elsőrendűen differenciált RAX adatok ACF és PACF ábrája

A 36. ábra azon kívül, hogy megmutatja a differenciálás szükségességét, arra is jó, hogy az autoregresszív tag rendjét segítsen előzetesen megbecsülni. Amint az a PACF ábráján látszik, az első lag után az értékek nulla közelében maradnak, így a vizsgálatot $AR(1)$ -el érdemes kezdeni. Ugyanakkor viszont az ACF függvény nem mutat mozgóátlag tagot, így a 2. lépést $MA(0)$ -val kezdem.

5.4.2 Becslés

Az identifikáció során tehát úgy tűnt, hogy kiinduló modellnek az $ARIMA(1,1,0)$ -t kell választanom. A modell becslése maximum likelihood módszerrel történik azzal a feltevéssel, hogy a maradék eloszlása normális. A munkát a program végezte el.

5.4.3 Ellenőrzés

Az első becslést egzakt ML módszerrel végeztem, ám mivel lehetőség volt a feltételes ML becslítés is, ezért az szintén elkészült. A feltételes ML mellett készült becslés eredményei jobbak lettek. A becslés eredményeként kapott adatok (27. Táblázat) alapján az ARIMA(1,1,0) modell:

$$\log \hat{y}_t = 0,000492952 + 0,0773676 \hat{y}_{t-1} \quad (5.8.)$$

Ellenőriznem kellett, hogy valóban ez-e a legjobban illeszkedő modell, így elvégeztem a modell túl- illetve alulillesztését (28. Táblázat), már mindet csak a feltételes maximum likelihood módszerrel.

27. Táblázat: ARIMA(1,1,0) modell

	ARMA(1,0)	ARMA(1,1)	ARIMA(1,1,0)	ARIMA(1,1,0) cond.	ARIMA(1,1,1)
AIC	-12884,05	-12894,49	-12893,02	-12917,01	-12913,22
HQ	-12879,88	-12886,15	-12886,77	-12912,85	-12904,89
SIC	-12872,64	-12871,67	-12875,91	-12905,61	-12890,41
	<i>Coefficient</i>		<i>Std. Error</i>	<i>z</i>	<i>p-value</i>
const	0,000492952		0,000278225	1,7718	0,07643 *
phi_1	0,0773676		0,0210611	3,6735	0,00024 ***
Mean dependent var	0,000531		S.D. dependent var		0,013119
Mean of innovations	-2,99e-19		S.D. of innovations		0,013082
Log-likelihood	6460,507		Akaike criterion		-12917,01
Schwarz criterion	-12905,61		Hannan-Quinn		-12912,85

28. Táblázat: Különböző ARMA modellek modellszelekciós kritériumai

	ARIMA(2,1,0)	ARIMA(2,1,1)	ARIMA(3,1,0)	ARIMA(3,1,1)
AIC	-12915,76	-12911,82	-12908,83	-12906,74
HQ	-12909,51	-12901,40	-12900,50	-12894,24
SIC	-12898,65	-12883,31	-12886,03	-12872,53

A 28. Táblázatban is jól látszik, hogy mind a három modellválasztási kritérium alapján az eredetileg is javasolt, ARIMA(1,1,0) modell a legjobb, hiszen annak vannak a legalacsonyabb értékei.

5.5 A RAX ARCH modellje

Egy befektető számára a megfigyelt tőzsdei index értékének alakulása azért fontos, hogy tudja, nyert vagy éppen veszített-e az adott befektetéssel. Számára igazán nem az a lényeges, hogy az index értéke mekkora, hanem hogy mennyivel nőtt vagy csökkent. Azért a változás mértéke az érdekes, hiszen ez mondja meg, hogy mekkora a befektetés hozama.

Elsőként tehát megvizsgáltam egy kicsit a hozam alakulását. A hozam nem más, mint a RAX értékek napi adatainak az előző napi adatokkal számított hányadosa logaritmizálva, azaz

$$\ln(y_t / y_{t-1}) \quad (5.10.)$$

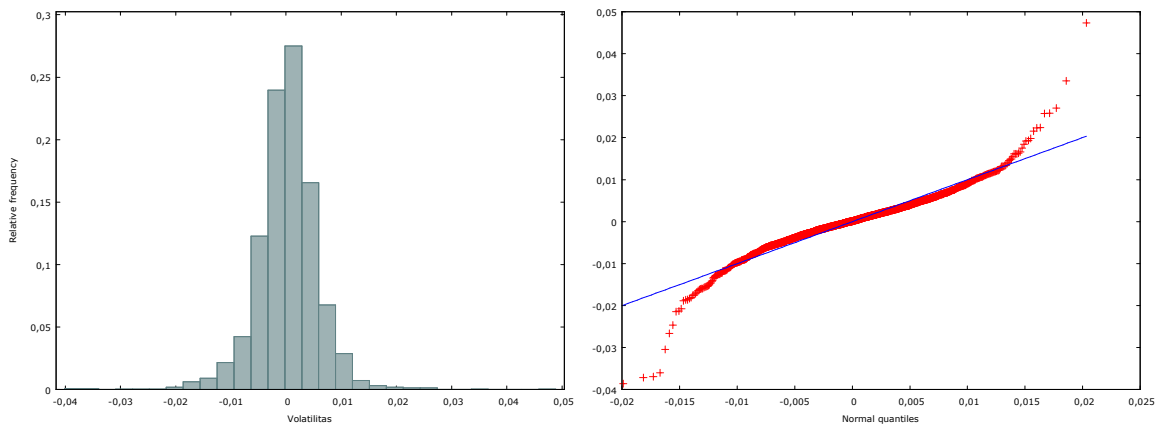
A hozamok alapstatisztikáiból (29. Táblázat) lehet következtetni bizonyos dolgokra. Így például az átlag azt mutatja, hogy napi 0,2%-os nyereség volt elérhető ebben a 9 évben. Ez éves szintre vetítve 5,57%-ot jelent. A legnagyobb elkönyvelhető veszteség egy nap alatt 3,86%, míg a legnagyobb nyereség 4,73% volt.

29. Táblázat: A RAX hozamok alapstatisztikája

Átlag	Medián	Minimum	Maximum
0,000216925	0,000289660	-0,0385766	0,0473383
Szórás	Relatív szórás	Ferdeség	Csúcsosság
0,00573339	26,4303	-0,287449	7,34833

A szórás és a relatív szórás mellett található két adat a ferdeségről és a csúcsosságról ad információt. Ezek szerint az eloszlás majdnem szimmetrikus, enyhe jobboldali aszimmetria³⁰ figyelhető meg. A csúcsosság értéke normális eloszlásnál 3 lenne, míg itt ez több mint a duplája, azaz az eloszlás meglehetősen csúcsos (38. ábra).

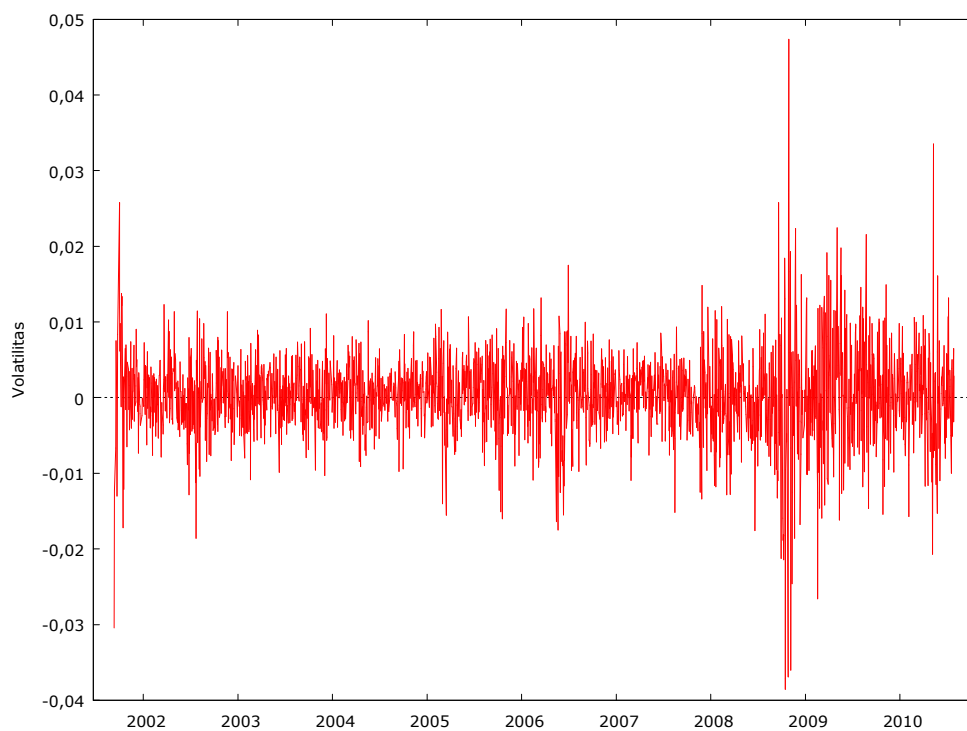
³⁰ Az angol szakirodalomban ezt inkább úgy fogalmaznák meg, hogy az eloszlás balra elnyúló.



38. ábra: A RAX hozamok eloszlása és Q-Q plotja

Az eddig megszerzett információkból azonban még nem egyértelmű, hogy erre az idősorra valóban szükséges-e *ARCH* modellt illeszteni.

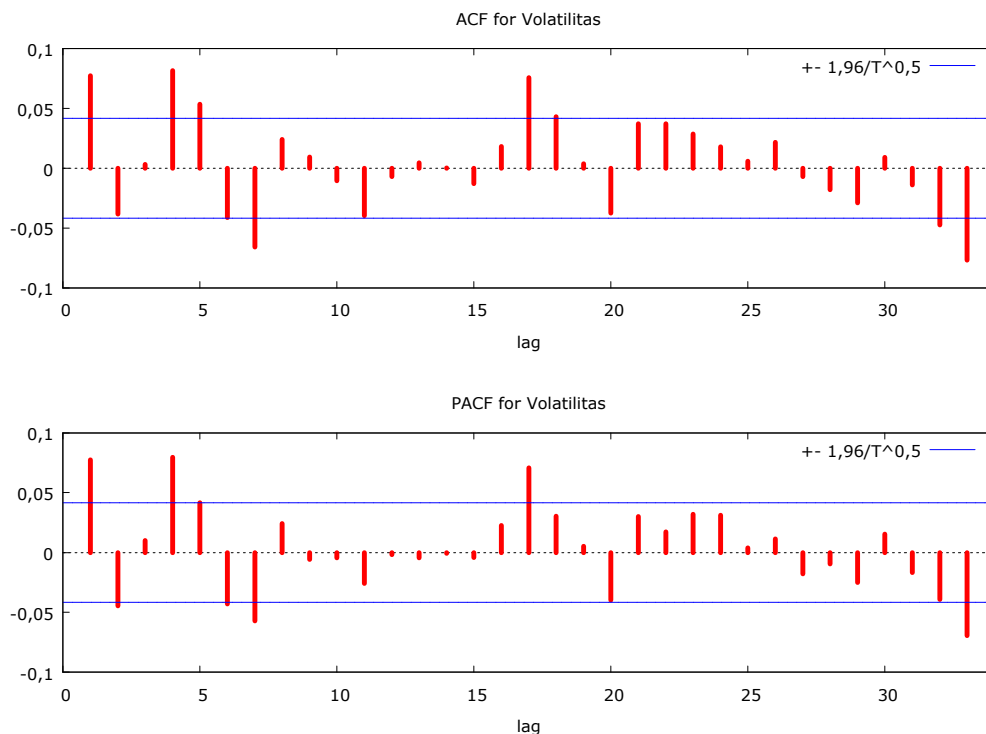
Az Engle által kifejlesztett *ARCH* modellek akkor alkalmazhatóak jól, ha az idősoromban heteroszkedaszticitás esete áll fenn. Éppen ezért azt kellett ellenőriznem, hogy van-e szó a RAX idősoránál a hibatagok eltérő szórásáról. Ennek érdekében először megnéztem a hozamok ábráját (39. ábra).



39. ábra: A RAX volatilitása 2001. szeptember 7. - 2010. július 29.

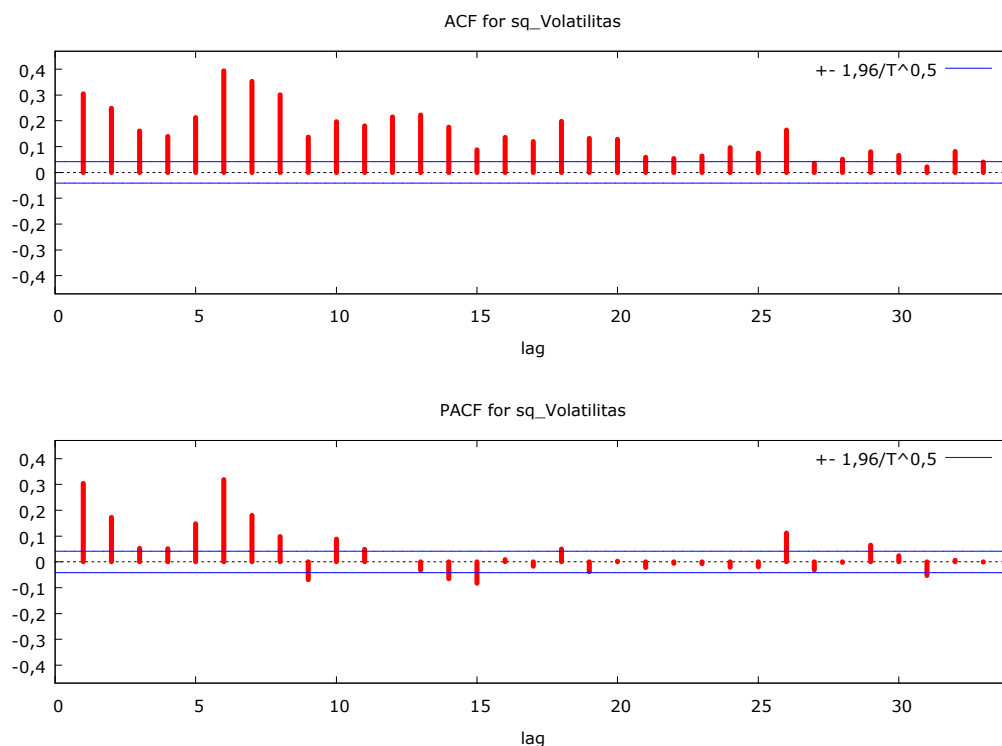
A 39. ábraán jól látszik, hogy a szórás nem egyenletes, hiszen a volatilitás értékek 0 körül szóródnak hol kisebb, hol nagyobb értéket felvéve. Megfigyelhető a volatilitás klasztereződése, feltételelessége, azaz a volatilitás értéke függ a korábbi értékétől. Ilyen esetben az *ARCH* modell alkalmazása célszerű.

Ezt a döntést támasztja alá a hozamok és hozamnégyzetek korrelogramja (40. ábra, 41. ábra).



40. ábra: A RAX hozamok ACF és PACF függvényei

A volatilitás klasztereződése az ACF függvényen látható, mint szignifikáns autokorreláció. Amíg a hozamok autokorrelációi közül csupán néhány haladja meg a szignifikáns szintet és azt is éppen, addig a hozamnégyzeteknél a 26-dik tagig mind szignifikáns.



41. ábra A RAX hozamnégyzetek ACF és PACF függvényei

Immár bizonyítást nyert, hogy igenis szükséges az *ARCH* modell használata. Az általános szabálynak megfelelően *AR(1)+ARCH(1)* modell becslésével kezdem a számításokat (30. Táblázat).

30. Táblázat: *AR(1)+ARCH(1)* modell eredményei

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>	
const	0,000192715	0,000111495	1,7285	0,08405	*
Volatilitas_1	0,0697283	0,027673	2,5197	0,01181	**
alpha(0)	2,1609e-05	2,03697e-06	10,6084	<0,00001	***
alpha(1)	0,328866	0,0200817	16,3764	<0,00001	***

Statistics based on the weighted data:

Sum squared resid	2248,345	S.E. of regression	1,008410
R-squared	0,002863	Adjusted R-squared	0,002412
F(1, 2211)	6,349021	P-value(F)	0,011815
Log-likelihood	-3157,644	Akaike criterion	6319,287
Schwarz criterion	6330,692	Hannan-Quinn	6323,453
rho	0,005598	Durbin-Watson	1,988180

A becsült modell első ránézésre jónak tűnik, hiszen viszonylag alacsonyak a modellszelekciós kritériumok értékei. A DW statisztika értéke szinte alig tér el kettőtől, és a ρ nullához közel esik. Ez a két utóbbi adat arra utal, hogy a becsült modell hibatagjai között nincs autokorreláció.

Az $AR(1)+ARCH(1)$ modell lehetne a megfelelő, ám mindenképpen szükség van más modellek felállítására is, hogy a modellválasztási kritériumok alapján aztán dönteni lehessen. Ezért megvizsgáltam más, általam elképzelhetőnek gondolt modellformák adatait is.

31. Táblázat: ARCH modellek modellszelekciós kritériumai

	AR(1)+ARCH(1)	AR(1)+ARCH(2)	AR(1)+ARCH(3)	AR(1)+ARCH(4)	AR(1)+ARCH(5)
lnL	-3157,644	-3133,918	-3110,344	-3108,000	-3119,742
AIC	6319,287	6271,837	6224,687	6220,000	6243,485
HQ	6323,453	6276,003	6228,853	6224,166	6247,650
SIC	6330,692	6283,240	6236,090	6231,402	6254,885

	AR(2)+ARCH(4)	AR(3)+ARCH(4)	AR(5)+ARCH(4)	AR(6)+ARCH(4)	AR(10)+ARCH(4)
lnL	-3110,362	-3110,598	-3103,938	-3104,127	-3095,035
AIC	6226,724	6229,195	6219,875	6222,255	6212,069
HQ	6232,972	6237,525	6232,368	6236,829	6234,966
SIC	6243,825	6251,995	6254,069	6262,144	6274,732

Az már az egyszeres autoregressziót feltételező $AR(1)$ modelleknél egyértelművé vált, hogy az $ARCH(4)$ modell a legjobb. Az $AR(2)$ és $AR(3)$ modelleknél ez a megfigyelés megerősítést nyert, így a továbbiakban már csak az $ARCH(4)$ modelleket vizsgáltam.

Azt tapasztaltam, hogy az autoregresszió fokának növelésével nő az illesztett modell jósága is, amit a log-likelihood adat növekedése és a modellszelekciós kritériumok csökkenése mutat. Az $AR(10)$ modell után folytatódik ez a trend. Így azzal a problémával álltam szemben, hogy nem tudtam a legjobb modellt kiválasztani.

5.6 A RAX GARCH modellje

Már korábban is utalt egy jel arra, hogy az *ARCH* modell alkalmazása nem biztos, hogy elegendő lesz egy megfelelő modell felállításához a RAX 2001. szeptember 7. és 2010. július 29. közötti idősorára.

Amikor ábrázoltam a RAX hozamának eloszlását (38. ábra) láthatóvá vált a vastag szélek problémája, azaz hogy a többszörös szórásstartományon kívül esik az adatok egy része. Ez látszik az eloszlás ábráján, bár az adatok relatív kis száma miatt igen alacsonyak az oszlopok, így sokkal egyértelműbb a Q-Q plot, ahol az alsó és felső részen lévő pontok utalnak a vastag szélek problémájára.

A *GARCH* modellek ezt a problémát is kiküszöbölik, mint ahogy az *AR(m)* tag magas száma miatt sem kell sok paramétert becsülni. A becslést a *AR(1)+ GARCH(1,1)* modellel kezdtem (32. Táblázat).

32. Táblázat: *AR(1)+GARCH(1,1)* modell

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>z</i>	<i>p-value</i>	
const	0,000382808	9,41965e-05	4,0639	0,00005	***
Volatilitas_1	0,0393266	0,0223294	1,7612	0,07820	*
alpha(0)	6,49176e-07	1,64955e-07	3,9355	0,00008	***
alpha(1)	0,0966117	0,0118824	8,1307	<0,00001	***
beta(1)	0,880807	0,0142588	61,7730	<0,00001	***

Mean dependent var	0,000231	S.D. dependent var	0,005697
Log-likelihood	8642,604	Akaike criterion	-17273,21
Schwarz criterion	-17238,99	Hannan-Quinn	-17260,71
Unconditional error variance = 2,87488e-005			

Az adatok alapján a jövőbeni érték becsléséhez szükséges egyenletek a következőképpen alakulnak:

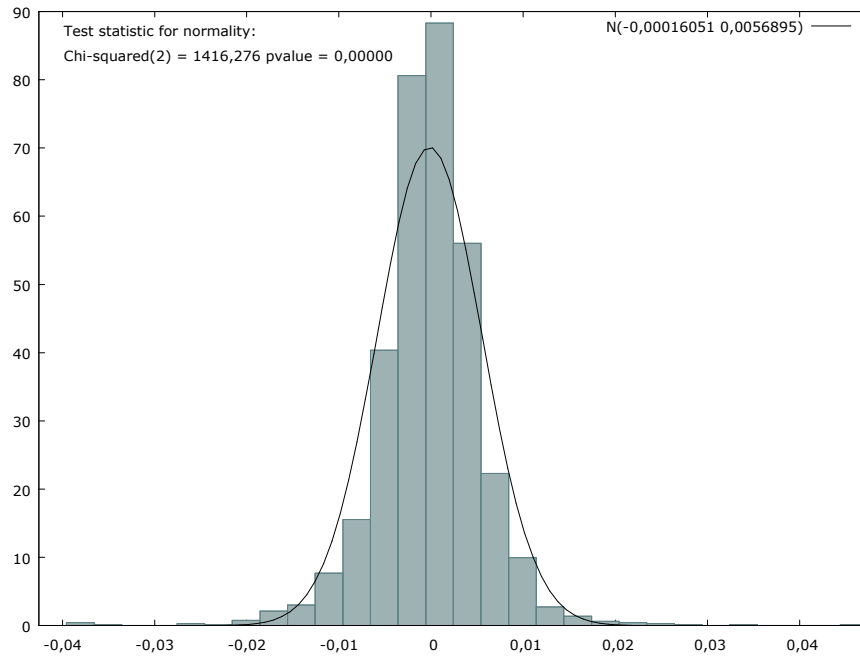
$$\hat{y}_t = 0,00038 + 0,039\hat{y}_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t$$

$$\hat{\varepsilon}_t = \eta_t \sigma_t \quad (5.11)$$

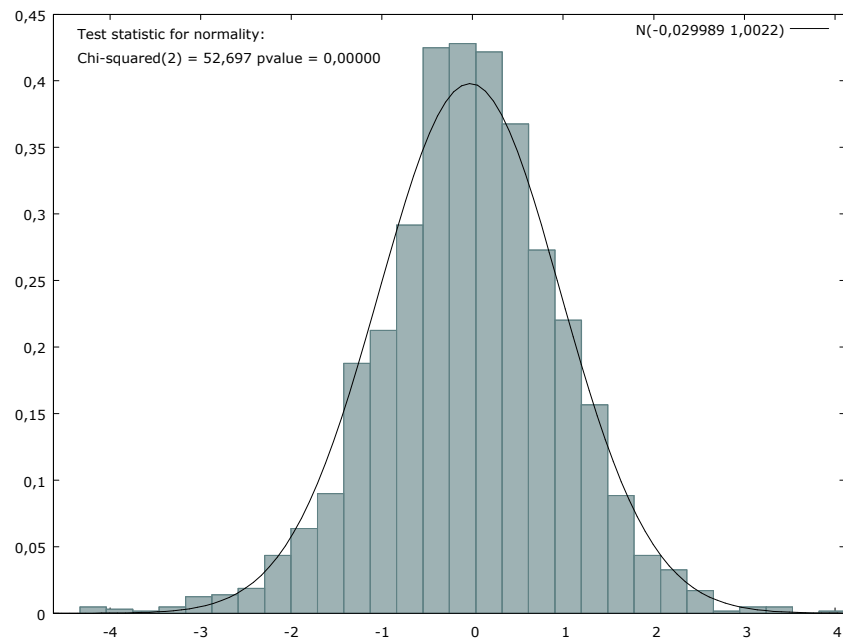
$$\hat{\sigma}_t^2 = 6,49 \cdot 10^{-7} + 0,097 \cdot \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + 0,88 \cdot \hat{\sigma}_{t-1}^2$$

ahol $\eta_t \sim N(0,1)$.

Ha megvizsgáljuk a reziduumok eloszlását láthatjuk, hogy a becsléssel a normálishoz közelebb került az értékük, de még mindig nem normálisak, amit az illeszkedésvizsgálat is alátámaszt. Az első esetben 1416,276, míg a standardizált hibatagoknál már csak 52,697 volt a tesztstatisztika értéke (42. ábra, 43. ábra)

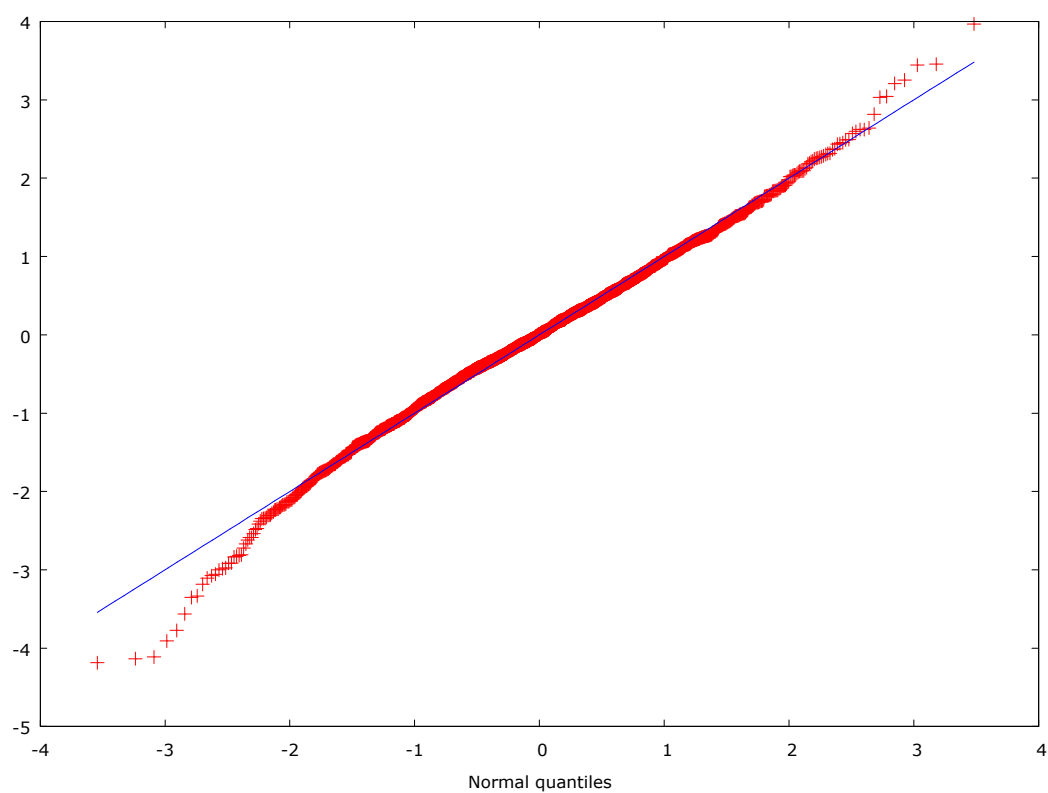


42. ábra: $AR(1)+GARCH(1,1)$ modellnél reziduumok eloszlása



43. ábra: $AR(1)+GARCH(1,1)$ modellnél a standardizált reziduumok eloszlása

A hibatagok Q-Q plotja is azt mutatja, hogy a standardizált reziduumok eloszlása a normálishoz közel esik, szinte csak a vastag szélek problémája maradt meg (44. ábra).



44. ábra: $AR(1)+GARCH(1,1)$ standardizált reziduumainak Q-Q plotja

6 EREDMÉNYEK ÖSSZEGZÉSE, JAVASLATOK

6.1 Új/újszerű eredmények

1. Kutatásaim során az időben történő előrejelzéseknek többféle csoportosításával találkoztam a szakirodalomban. Ezek a csoportosítások azonban nem fedték teljesen egymást. Így a vizsgálatok során kialakítottam egy egységes rendszert, amely úgy a magyar, mind a nemzetközi szakirodalom csoportosításait tartalmazza.

2. Vizsgálataim során több módszerrel is elemeztem a RAX idősorát 2001. szeptember 7. és 2010. július 29. között. Az 1970-es évekig vezető szemléletmód, azaz a determinisztikus idősorelemzés alapján azt az eredményt kaptam, hogy a megfigyelt adatok egy **ötödfokú polinomiális trenddel** írhatóak le legjobban. Miután a trendet leválasztottam, mozgóátlagú trenddel a ciklus értékét is kimutattam. Az utolsó kiszűrhető elem a szezonális volt. Ami ezután megmaradt az a véletlen, amelynek csekély jelentőséget nyilvánít a determinisztikus idősorelemzés.

3. Ahogy a polinom foksámát emeltem a trendszámítás során, úgy kaptam egyre jobban illeszkedő függvényt. Ám a foksám emelése egyúttal rontja a modell jóságát. Ennek a hibának a kiküszöbölésére alkalmaztam **egy újfajta spilne-t**, hogy a trendet általa írjam le. Ennek az új matematikai megoldásnak köszönhetően az idősorban lévő alapirányzatot jobban voltam képes modellezni, mint korábban a polinomokkal.

4. A sztochasztikus idősorelemzés vizsgálatainak középpontjában a véletlen áll, ami nem is annyira véletlen. A determinisztikus elemzések számának csökkenése az autoregresszív mozgóátlagolású (ARMA) modellek elterjedésének volt köszönhető. A megvizsgált 2216 adat alapján azt tapasztaltam, hogy az **idősor nem stacionárius**. Miután differenciálással kiszűrtem a trendhatást, már egy **ARIMA(1,1,0) modellt** illesztettem, ahol az első egyes arra utal, hogy a tagok között elsőfokú autoregresszív kapcsolat volt. A második egyes az egyszeres differenciálást jelenti. A nulla jelentése pedig az, hogy az idősorban nincs mozgóátlag tag.

5. Az *ARMA* modellek nem képesek kezelni a volatilitást, a maradéktag szórásának klasztereződését. Ennek a problémának a kezelésére találta ki Engle [21] az *ARCH* (autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás) modelleket, melyek széles körben elterjedtek a nagy volatilitással küzdő pénzügyi területeken. A RAX hozamának majdnem kilenc éves megfigyelt idősorára nem tudtam *ARCH* modellt meghatározni, mert az autoregresszív tag fokszámát emelve mindig jobb lett a modell, így egy idő után már a becslés annyira bonyolult lett, hogy más módszert kellett választanom.

6. Bollerslev [4] elkészítette az *ARCH* modellek általánosítását, melyet *GARCH* (általánosított *ARCH*) modellnek nevezett el. Ez a modell megoldást adott az autoregresszív tag fokszámának problémájára. Az idősor becslését a legegyszerűbb modellel ***AR(1)+GARCH(1,1)*** kezdtem, és a végén az bizonyult a legmegfelelőbbnek a modellszelekciós kritériumok alapján.

6.2 Javaslatok

A determinisztikus idősorelemzés estén a ciklus és a szezon-hatás kiszűrése után a véletlen tagok között elsőrendű autokorrelációra utaló adatokat kaptam a polinomos és a spline-nal képzett trendek esetén is. Annak érdekében, hogy ezek a modellek jobban használhatóak legyenek, szükséges lenne annak a meghatározása, hogy mi okozza ezt a hatást. Elképzelhetőnek tartom, hogy valami olyan, a tőzsdén is ismert effektusról (napár-hatás, hús-vét-hatás,...) van szó, amelyet figyelembe véve az autokorreláció megszüntethető lenne.

A másik olyan terület, ahol továbblépési lehetőséget látok, az az *ARCH* modellek köre. Minden vizsgálattal arra az eredményre jutottam, hogy az eloszlás nem normális eloszlású. Azonban vannak az *ARCH* modellcsaládnak olyan tagjai, amelyek ezt a problémát képesek kezelni. Így tehát ezeket a modelleket is lehetne még a továbbiakban majd felhasználni egy jobb modell elkészítéséhez.

Mint végzett közgazdásznak, érdekes lehet megvizsgálni az idősort az előrejelzések egy olyan módszerével, amit eddig még nem alkalmaztam. Valószínűnek tartom, hogy a felállított modelleket ötvözve az *ökonometriai modellekkel* egy az eddigieknél jobb modellt lehetne készíteni.

ÖSSZEFOGLALÁS

A disszertáció megírásával célom az volt, hogy az időbeli előrejelzési módszerek közül egy olyat találjak, amellyel a legjobb előrejelzést tudnám készíteni egy tőzsdei index jövőbeli értékére.

A tőzsdei indexek közül a RAX-ot választottam, amely a befektetési társaságok irányadó indexe. Azért a RAX-ra esett a döntésem, mert ma már a magyar társadalom is elért arra a gazdasági szintre, ahol sok embernek vannak megtakarításai. Amennyiben valaki nem fél a kockázattól, úgy a megtakarításait befektetési alapokba is helyezheti. Ez egy tisztán értékpapír portfóliónál kisebb kockázatot jelent, s így többen is választják.

Az előrejelzések készítése során rádöbbsentem, hogy a hazai és a külföldi szakirodalom nem egységes az előrejelzési módok csoportosítása terén. Ezért készítettem egy olyan csoportosítást, amely ötvözi mindkét szakirodalom elnevezéseit és csoportosítási módjait.

A vizsgálatok során három módszert alkalmaztam. Elindultam attól a módszertől, amely a legrégebbi és eljutottam a legfrissebb kutatási módszerekig. Utam során így az 1970-es évekig uralkodó szemléletmód, a determinisztikus szemlélet volt a kiindulópont. A következő állomást a sztochasztikus szemléletmód a '70-es években elterjedt modellje, a Box-Jenkins modell követte. Az utolsó állomás a 2003-ban Nobel-díjjal jutalmazott Robert F. Engle által kifejlesztett módszer, az *ARCH* modellcsalád volt.

A determinisztikus idősorelemzések legelterjedtebb fajtája a dekompozíciós modell, amely az idősort négy részre szedi szét. A négy rész a trend, ciklus, szezon és véletlen. Ezekről a részekről azt feltételezi a módszer, hogy tagonként meghatározhatóak az értékeik. Attól függően, hogy az elemek között milyen kapcsolatot feltételezünk, beszélhetünk additív és multiplikatív modellekről. A vizsgálatok során azt feltételeztem, hogy az egyes tagok hatása összeadódik, így tehát egy additív modellt építettem. A trendszámítás során az ötödfokú polinomiális trendet találtam a legalkalmasabbnak a vizsgált idősor jellemzésére. A trend után a ciklus kiszűrése következett, ahol egy kb. 7 éves ciklus látszott kirajzolódni. A szezonálisnál a havi és a negyedéves adatokat is megvizsgáltam.

A polinomok fokszámának emelése helyett, egy a trendszámítás estében még nem gyakran alkalmazott függvénytypust felhasználva is felépítettem egy determinisztikus trendet. A spline-ok egy új típusának segítségével a trendek jobban közelítették a megfigyelt adataimat, azaz jobb illeszkedést kaptam.

RAX 2001. szeptember 7. - 2010. július 29-ig lévő időszora helyett az adatoknak csak a hozamát vizsgáltam a továbbiakban. Erre azért volt szükség, mert így lehet a másik két modellel megfelelő előrejelzést készíteni.

Az *ARIMA* modellek közül az lett végül a megfelelő, amelyet a modellépítési lépések során, illetve a vizsgálatok alapján először jónak feltételeztem. A stacionaritás hiánya miatt az idősort differenciálni kellett. Az így kapott idősor már stacionárius volt, így következhetett a modellépítés. Az egyes adatok az előtük lévő adatok értékétől jelentősen függtek, azaz elsőrendű autokorrelációt találtam. Mozgóátlagolásra semmilyen jel nem utalt és nem is tudtam kimutatni. A végeredmény egy *ARIMA*(1,1,0) modell lett.

Az idősorra a legjobb előrejelzést az *AR*(1)+*GARCH*(1,1) modell adta. Ehhez a modellhez az *ARCH* modellek elemzése után jutottam el, ahol azt tapasztaltam, hogy az egyes adatok között olyan fokú autoregresszió van, amit az a modell csak nehezen tudott kezelni.

SUMMARY

It was my aim with writing of this dissertation that is temporal forecast one form among methods let me find the best forecast on onto the future value of a stock index.

From the stock indexes I choose RAX which is the benchmark of funds and asset management companies. I choose RAX because in my opinion Hungarian society reached the economic level where a lot of common people have savings. In as much somebody is not afraid of certain risk, may put his savings into investment funds to. Since it is a lower risk then a pure stock portfolio many choose this option.

Making forecast I wake up the truth the Hungarian and international literature are not uniform in grouping forecasting methods. This was the reason I made a new model of grouping which combine the names and grouping methods of both literatures.

I applied three different methods in the course of the examination. I took the road from the oldest method and got at the newest one. In the course of my road my starting point was the deterministic opinion, the leading opinion of the '70s. The next station was a stochastic approach, the Box-Jenkins approach, which came into general use in the '70s. The last stop was the *ARCH* methods, which was developed by 2003 Nobel Prize winner Robert F. Engle.

Among deterministic time series analysis the widespread method is the decomposition one, which bake up the time series into four parts. These parts are trend, cycle, seasonality and randomness. The hypothesis of the method is that the parts can be identified apart. There is additive and multiplicative model depending on connection between parts. During my research I assumed that the parts effect cumulate so I built an additional model. For identifying the time series a fifth-degree polynomial trend was the best one. After filtering out trend the cyclical component was the following, where it seemed like a seven year cycle stood out. I examined the monthly and quarterly seasonality too.

Instead of raising the rank of the polynomial trend I used a rear used function type to build the deterministic trend. Trends made with a brand new type of splines were better approximate for observed dataset than polynomial trends, so I got a better fitting trend.

At the following part of my examination instead of using data from 7th September 2001 to 29th July 2010 I was using RAX's returns. It was necessary for making proper forecasts with the two following methods.

At the end of the examination the best ARIMA model was the one I estimated at the first step of the method. Because of not stacionarity I had to difference the time series. The time series I get was stacioner, so I could follow with model building. Data's were strong dependent of the data before, so I found a first-order autocorrelation. There was no sign of moving average, and I neither could establish it. The final model was an ARIMA(1,1,0).

Onto the time series the best forecast the AR(1)+GARCH(1,1) model got it. To this model I got after ARCH models analysis where I experienced that there is autoregression with a degree like that the model was able to treat difficulty only.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Akaike, Hirotugo (1974): A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19. pp. 716–723.
- [2] Al-Subaihi, Ali.A (2007): Variable Selection in Multivariate Regression using SAS / IML. Saudi Arabia
- [3] Bierens, Herman J. (2006): Information Criteria and Model Selection. Pensilvania State University
- [4] Bollerslev, Tim (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31. pp. 307-327.
- [5] Bollerslev, Tim (2007): Glossary to ARCH (GARCH). San Diego: Festschrift Conference in Honor of Robert F. Engle
- [6] Box, G. E. P. - Jenkins, G. M. (1970): Time Series Analysis, Forecasting and Control. San Francisco: Holden Day
- [7] Box, G. E. P. - Jenkins, G. M. (1970): Distribution of Residual Autocorrelation in Autoregressive Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association* 65. pp. 1509-1526.
- [8] Box, G. E. P. - Ljung, G. M. (1978): On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika* 65. pp. 297–303.
- [9] Box, G. E. P. - Pierce, D. A. (1970): Distribution of the Autocorrelations in Autoregressive Moving Average Time Series Model. *Journal of American Statistical Association* 65. pp. 1509–1526.
- [10] Breusch, T.S.- Pagan, A. R. (1979): A Single Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient VARIation. *Econometrica* 47.(September 1979), pp. 1287-1294.

- [11] Breusch, T. S. (1978): Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models. Australian Economic Papers 17. pp. 334-355.
- [12] Brown, R. G. (1963): Smoothing, Forecasting and Prediction. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall
- [13] Cavanaugh, Joseph E. – Neath, Andrew A. (1999) : Generalizing the Deviation of the Schwarz Information Criterion. Communications in Statistics – Theory and Methods 28. pp. 49-66.
- [14] Chatfield, C. (1978): The Analysis of Time series: Theory and Practice. London: Chapman and Hill
- [15] Cottrell, Allin – Lucchetti, Ricardo „Jack” (2010): Gretl Users Guide.
- [16] Csesznák Anita (2002): Előrejezési módszerek és pénzügyi alkalmazásuk. Kereskedelmi Főiskolai Füzetek 11. 12-19.o.
- [17] Darvas Zsolt (2001): Árfolyamrendszer-hitelesség és kamatláb-változékonyság. Statisztikai Szemle, 79. évfolyam 6. szám, 490-506.o.
- [18] Dickey, David Alan – Fuller, Wayne Arthur (1979): Distribution of the Estimators for Autoregressive Time-Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association 74. pp. 427-431.
- [19] Durbin, J. – Watson, G. S. (1950): Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression I. *Biomertika*, pp. 409-428.
- [20] Durbin, J. – Watson, G. S. (1951): Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression II. *Biomertika*, pp. 159-178.
- [21] Engle, Robert F.(1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50. pp. 987-1008.
- [22] Engle, Robert F.(2003): Risk and Volatility:Econometric Models and Financial Practice.The American Economic Review, June 2004., pp. 405-420.

- [23] Földvári Péter (2007): Útmutató a GRELT ökonometriai szoftver használatához, ökonometriai példákkal. Debrecen
- [24] Godfrey, Leslie George (1978): Testing for Higher Order Serial Correlation in Regression Equations When the Regressors Include Lagged Dependent Variables. *Econometrica* 46. pp. 1303-1310.
- [25] Godfrey, Leslie George (1979): Testing the Adequacy of the Time Series Model. *Biomertika* 66. pp. 170-181.
- [26] Hannan, Edward James – Quinn, Barry Gerald (1979): The Determination of the Order of an Autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society* 41. pp. 190–195.
- [27] Holt, Charles C. (1957): Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted averages. *ONR Research Memorandum* 52, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh
- [28] Hornstein, Helmut (2007): Így működik: Tőzsdepszichológia befektetőknek Nyereséget elérni, veszteséget elkerülni. Miskolc: Z-Press Kiadó Kft.
- [29] Hulyák Katalin (1976): Idősorok sztochasztikus modellje. *Ökonometriai Füzetek* 13. szám
- [30] Hunyadi László – Mundruczó György- Vita László (2001): Statisztika. Budapest: AULA
- [31] Kecskeméti István (2006): Tőzsdei befektetések a technikai elemzés segítségével. Kecskeméti István és Társa Bt.
- [32] Kerékgyártó Györgyné- Mundruczó György (2000): Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben. Budapest: AULA
- [33] Kerékgyártó Györgyné - Mundruczó György – Sugár András (2002): Statisztikai módszerek és alkalmazások, A gazdasági, üzleti elemzésben. Budapest: AULA
- [34] Korpás Attiláné Dr. (2008): Általános statisztika II. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó

- [35] Kóbor Ádám (2000): A feltétel nélküli normalitás egyszerű alternatívái a kockáztatott érték számításban. *Közgazdasági Szemle* XLVII. 878-989. o.
- [36] Kőrösi Gábor – Mátyás László - Székely István (1990): *Gyakorlati ökonometria*. Budapest: Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
- [37] Köves Pál- Párniczky Gábor (1989): *Általános statisztika I-II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó
- [38] Kwiatkowski, Denis - Phillips, Peter C. B. – Schmidt, Peter – Shin, Yongcheol (1992): Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root. *Journal of Econometrics* 54, pp. 159–178.
- [39] Maddala, G. S. (2004): *Bevezetés az ökonometriába*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó
- [40] Malinvaud, Edmond (1974): *Az ökonometria statisztikai módszerei*. Budapest: Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
- [41] Michelberger Pál – Szeidl László – Várlaki Péter (2001): *Alkalmazott folyamatstatisztika és idősoranalízis*. Budapest: Typotex Kiadó
- [42] Nagy Attila (2007): *BefektetésTITKOK*, Budapest: Invest-Projekt Kft.
- [43] Nelson, CharlesR. – Kang, Heejoon (1983): Pitfalls in the use of Time as an Explanatory Variable in Regression. National Bureau of Economic Research: NBER Technical Working Papers 0030.
- [44] Pawlowski, Zbigniew (1970): *Ökonometria*. Budapest: Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
- [45] Prais, S. – Winsten, C. (1954): *Trend Estimation and Serial Correlation*. Chicago: Cowles Commission, Discussion Paper 383.
- [46] Polgár Rudolf (2004): *Általánosított spline approximáció*. Sopron: Geomatikai Közlemények VII.

- [47] Polgár Rudolf (2006): Általánosított bilineáris spline approximáció. Sopron: Geomatikai Közlemények IX.
- [48] Polgár Rudolf (2010): A generalized spline approximation. *Annales Computatorica* 32. pp. 103-121.
- [49] Polgárné Hoschek Mónika (2003): Statisztikai módszerek alkalmazása a tőzsdei gyakorlatban. Sopron: Tudomány Napi Konferencia
- [50] Polgárné Hoschek Mónika (2005): Regresszió-számítás és alkalmazása a gazdasági gyakorlatban. Sopron
- [51] Polgárné Hoschek Mónika (2009): Előrejelzési módszerek összehasonlítása. Kecskemét: EFTK II. kötet 895.-899. o.
- [52] Polgárné Hoschek Mónika (2010): Autoregresszió az idősorelemzésben. Sopron: Hitel, Világ, Stádium - Nemzetközi Tudományos Konferencia
- [53] Polgárné Hoschek Mónika (2011): Időbeli előrejelzések. Szombathely:
- [54] Ralph, D. - Snyder, A. -Koehler, B. - Ord, J. K. (2002): Forecasting for inventory control with exponencial smoothing, *Intrenational Journal of Forecasting*, pp. 18. 5-18.
- [55] Ramanathan, Ramu (2003): Bevezetés az ökonometriába alkalmazásokkal. Budapest: Panem Kiadó
- [56] Rotyis József (2001): Tőzsdei befektetők kézikönyve. Budapest: KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó
- [57] Shittu, O. I. – Asemota, M. J. (2009): Comparison of Criteria for Estimating the Order of Autoregressive Process: A Monte Carlo Approach. *European Journal of Scientific Research* 30. pp. 409-416.
- [58] Schwarz, Gideon E. (1978): Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics* 6. pp.461–464.
- [59] Tusnádi Gábor – Ziermann Margit (1986): Idősorok analízise. Budapest: Műszaki Könyvkiadó

[60] White, Halbert (1980): A Heteroscedasticity - Consistent Covariance Matrix And a Direct Test for Heteroscedasticity. *Econometrica* 48. (May 1980), pp. 817-838.

[61] Závoti József (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. Sopron: Geomatikai Közlemények II.

www.befektetesTITKOK.hu

www.bet.hu

www.internetsuli.hu

www.tapzor.hu

1. MELLÉKLET

Dátum	RAX
2001.09.07	519,38
2001.09.11	484,21
2001.09.12	470,75
2001.09.17	463,56
2001.09.18	471,65
2001.09.20	471,47
2001.09.21	457,53
2001.09.24	466,40
2001.10.01	494,93
2001.10.02	508,67
2001.10.03	515,93
2001.10.04	527,70
2001.10.05	533,26
2001.10.08	531,78
2001.10.09	548,89
2001.10.10	564,47
2001.10.11	582,09
2001.10.12	588,83
2001.10.15	565,97
2001.10.16	569,55
2001.10.17	568,89
2001.10.18	553,23
2001.10.19	553,15
2001.10.24	561,50
2001.10.25	559,44
2001.10.26	568,47
2001.10.29	572,09
2001.10.30	563,58
2001.10.31	569,69
2001.11.05	574,64
2001.11.06	572,56
2001.11.07	574,67
2001.11.08	579,23
2001.11.09	573,60
2001.11.12	571,99
2001.11.13	581,78
2001.11.14	582,88
2001.11.15	582,98
2001.11.16	577,60
2001.11.19	582,76
2001.11.20	578,96
2001.11.21	579,92
2001.11.22	581,05
2001.11.23	584,35
2001.11.26	593,75
2001.11.27	589,51
2001.11.28	588,77
2001.11.29	592,91

2001.11.30	591,41
2001.12.03	590,64
2001.12.04	592,74
2001.12.05	605,17
2001.12.06	610,87
2001.12.07	617,98
2001.12.10	616,03
2001.12.11	613,41
2001.12.12	617,14
2001.12.13	606,81
2001.12.14	611,39
2001.12.17	612,41
2001.12.18	611,11
2001.12.19	609,54
2001.12.20	606,54
2001.12.21	601,45
2001.12.27	598,13
2001.12.28	598,05
2002.01.02	596,42
2002.01.03	599,65
2002.01.04	609,76
2002.01.07	608,25
2002.01.08	605,14
2002.01.09	605,76
2002.01.10	611,73
2002.01.11	615,55
2002.01.14	606,75
2002.01.15	612,53
2002.01.16	614,36
2002.01.17	623,03
2002.01.18	621,02
2002.01.21	621,70
2002.01.22	625,97
2002.01.23	622,06
2002.01.24	625,84
2002.01.25	629,37
2002.01.28	623,62
2002.01.29	621,82
2002.01.30	619,14
2002.01.31	624,94
2002.02.01	627,73
2002.02.04	624,26
2002.02.05	613,40
2002.02.06	612,33
2002.02.07	616,44
2002.02.08	611,14
2002.02.11	615,59
2002.02.12	612,89
2002.02.13	616,60

2002.02.14	616,68
2002.02.15	619,65
2002.02.18	612,42
2002.02.19	610,73
2002.02.20	614,17
2002.02.21	613,87
2002.02.22	609,31
2002.02.25	611,56
2002.02.26	610,22
2002.02.27	608,97
2002.02.28	601,53
2002.03.01	602,12
2002.03.04	606,23
2002.03.05	610,39
2002.03.06	617,21
2002.03.07	624,23
2002.03.08	623,85
2002.03.11	612,67
2002.03.12	607,82
2002.03.13	606,90
2002.03.14	604,52
2002.03.18	599,50
2002.03.19	592,93
2002.03.20	594,51
2002.03.21	597,79
2002.03.22	614,97
2002.03.25	616,07
2002.03.26	619,90
2002.03.27	617,39
2002.03.28	621,35
2002.03.29	622,23
2002.04.02	618,39
2002.04.03	622,76
2002.04.04	626,05
2002.04.05	627,12
2002.04.08	642,13
2002.04.09	642,30
2002.04.10	649,85
2002.04.11	663,07
2002.04.12	658,01
2002.04.15	655,89
2002.04.16	665,51
2002.04.17	668,39
2002.04.18	668,32
2002.04.19	676,58
2002.04.22	672,08
2002.04.23	667,86
2002.04.24	662,48
2002.04.25	667,32

2002.04.26	673,21
2002.04.29	678,54
2002.04.30	696,52
2002.05.02	698,00
2002.05.03	707,42
2002.05.06	715,63
2002.05.07	717,62
2002.05.08	720,88
2002.05.09	718,70
2002.05.10	714,23
2002.05.13	708,87
2002.05.14	712,40
2002.05.15	705,44
2002.05.16	699,43
2002.05.17	701,49
2002.05.21	693,26
2002.05.22	687,34
2002.05.23	694,87
2002.05.24	696,20
2002.05.27	697,44
2002.05.28	694,67
2002.05.29	689,03
2002.05.30	688,93
2002.05.31	683,78
2002.06.03	688,58
2002.06.04	683,49
2002.06.05	683,90
2002.06.06	683,61
2002.06.07	677,06
2002.06.10	678,93
2002.06.11	674,27
2002.06.12	671,98
2002.06.13	670,76
2002.06.14	664,66
2002.06.17	663,45
2002.06.18	661,43
2002.06.19	652,15
2002.06.20	638,99
2002.06.21	642,80
2002.06.24	640,36
2002.06.25	642,06
2002.06.26	623,37
2002.06.27	634,87
2002.06.28	624,17
2002.07.01	631,99
2002.07.02	624,93
2002.07.03	625,61
2002.07.04	633,75
2002.07.05	643,29
2002.07.08	636,75
2002.07.09	631,22
2002.07.10	635,02

2002.07.11	628,99
2002.07.12	630,20
2002.07.15	625,03
2002.07.16	625,37
2002.07.17	628,59
2002.07.18	621,85
2002.07.19	624,22
2002.07.22	608,26
2002.07.23	599,87
2002.07.24	574,74
2002.07.25	581,30
2002.07.26	584,41
2002.07.29	599,99
2002.07.30	591,81
2002.07.31	592,61
2002.08.01	594,39
2002.08.02	594,76
2002.08.05	581,94
2002.08.06	596,05
2002.08.07	581,98
2002.08.08	584,84
2002.08.09	579,65
2002.08.12	580,53
2002.08.13	582,33
2002.08.14	582,18
2002.08.15	592,65
2002.08.16	591,78
2002.08.21	591,82
2002.08.22	605,33
2002.08.23	612,70
2002.08.26	616,23
2002.08.27	623,03
2002.08.28	618,55
2002.08.29	610,55
2002.08.30	616,53
2002.09.02	614,25
2002.09.03	602,41
2002.09.04	598,62
2002.09.05	595,71
2002.09.06	598,30
2002.09.09	600,18
2002.09.10	609,30
2002.09.11	615,08
2002.09.12	604,53
2002.09.13	603,62
2002.09.16	611,98
2002.09.17	609,66
2002.09.18	610,28
2002.09.19	599,58
2002.09.20	599,07
2002.09.23	597,24
2002.09.24	593,02

2002.09.25	597,32
2002.09.26	598,60
2002.09.27	592,63
2002.09.30	587,32
2002.10.01	587,00
2002.10.02	581,62
2002.10.03	581,36
2002.10.04	574,85
2002.10.07	569,19
2002.10.08	569,01
2002.10.09	571,53
2002.10.10	579,81
2002.10.11	585,54
2002.10.14	580,73
2002.10.15	591,50
2002.10.16	585,46
2002.10.17	595,72
2002.10.18	593,48
2002.10.21	600,86
2002.10.22	597,28
2002.10.24	594,52
2002.10.25	594,02
2002.10.28	599,44
2002.10.29	596,60
2002.10.30	605,30
2002.10.31	607,44
2002.11.04	612,28
2002.11.05	611,80
2002.11.06	610,79
2002.11.07	611,94
2002.11.08	617,36
2002.11.11	617,44
2002.11.12	613,92
2002.11.13	608,34
2002.11.14	613,72
2002.11.15	610,19
2002.11.18	613,53
2002.11.19	613,67
2002.11.20	614,89
2002.11.21	631,16
2002.11.22	638,87
2002.11.25	647,68
2002.11.26	642,75
2002.11.27	643,62
2002.11.28	641,61
2002.11.29	639,87
2002.12.02	647,80
2002.12.03	643,60
2002.12.04	641,49
2002.12.05	640,18
2002.12.06	628,06
2002.12.09	633,54

2002.12.10	636,34
2002.12.11	629,68
2002.12.12	635,04
2002.12.13	638,30
2002.12.16	645,17
2002.12.17	642,99
2002.12.18	633,90
2002.12.19	626,53
2002.12.20	626,45
2002.12.23	630,58
2002.12.27	631,65
2002.12.30	627,93
2002.12.31	630,91
2003.01.02	637,04
2003.01.03	637,11
2003.01.06	635,40
2003.01.07	634,73
2003.01.08	627,44
2003.01.09	623,44
2003.01.10	623,17
2003.01.13	632,37
2003.01.14	629,01
2003.01.15	621,70
2003.01.16	624,09
2003.01.17	624,41
2003.01.20	618,78
2003.01.21	622,09
2003.01.22	616,46
2003.01.23	617,50
2003.01.24	610,63
2003.01.27	599,53
2003.01.28	599,93
2003.01.29	593,45
2003.01.30	600,07
2003.01.31	603,34
2003.02.03	607,19
2003.02.04	600,82
2003.02.05	603,51
2003.02.06	596,95
2003.02.07	604,65
2003.02.10	604,12
2003.02.11	607,10
2003.02.12	600,85
2003.02.13	604,89
2003.02.14	602,24
2003.02.17	596,44
2003.02.18	598,55
2003.02.19	583,79
2003.02.20	593,51
2003.02.21	596,36
2003.02.24	595,25
2003.02.25	593,01

2003.02.26	595,58
2003.02.27	592,51
2003.02.28	592,95
2003.03.03	587,24
2003.03.04	579,46
2003.03.05	581,59
2003.03.06	577,79
2003.03.07	576,54
2003.03.10	584,97
2003.03.11	583,58
2003.03.12	582,11
2003.03.13	587,86
2003.03.14	588,99
2003.03.17	581,45
2003.03.18	593,50
2003.03.19	596,89
2003.03.20	595,74
2003.03.21	607,18
2003.03.24	607,11
2003.03.25	606,39
2003.03.26	610,55
2003.03.27	609,21
2003.03.28	613,07
2003.03.31	605,62
2003.04.01	611,37
2003.04.02	615,81
2003.04.03	621,98
2003.04.04	627,44
2003.04.07	630,76
2003.04.08	630,27
2003.04.09	628,89
2003.04.10	624,94
2003.04.11	631,26
2003.04.14	622,44
2003.04.15	624,61
2003.04.16	619,44
2003.04.17	617,12
2003.04.18	618,38
2003.04.22	616,07
2003.04.23	619,65
2003.04.24	622,98
2003.04.25	627,38
2003.04.28	627,05
2003.04.29	632,11
2003.04.30	636,26
2003.05.05	643,08
2003.05.06	648,96
2003.05.07	641,24
2003.05.08	639,47
2003.05.09	637,83
2003.05.12	642,55
2003.05.13	644,26

2003.05.14	642,06
2003.05.15	642,55
2003.05.16	642,49
2003.05.19	648,08
2003.05.20	656,76
2003.05.21	655,62
2003.05.22	655,75
2003.05.23	658,99
2003.05.26	655,93
2003.05.27	648,77
2003.05.28	656,80
2003.05.29	656,87
2003.05.30	658,76
2003.06.02	664,16
2003.06.03	661,57
2003.06.04	667,31
2003.06.05	665,78
2003.06.06	662,78
2003.06.10	647,89
2003.06.11	649,24
2003.06.12	658,55
2003.06.13	660,76
2003.06.16	654,70
2003.06.17	656,35
2003.06.18	647,02
2003.06.19	646,36
2003.06.20	640,66
2003.06.23	642,93
2003.06.24	639,33
2003.06.25	643,69
2003.06.26	639,38
2003.06.27	638,91
2003.06.30	634,47
2003.07.01	638,26
2003.07.02	636,68
2003.07.03	644,99
2003.07.04	644,06
2003.07.07	653,76
2003.07.08	646,49
2003.07.09	648,56
2003.07.10	646,79
2003.07.11	645,24
2003.07.14	640,25
2003.07.15	641,92
2003.07.16	646,17
2003.07.17	646,81
2003.07.18	649,56
2003.07.21	644,58
2003.07.22	643,26
2003.07.23	644,55
2003.07.24	644,42
2003.07.25	646,48

2003.07.28	654,64
2003.07.29	650,12
2003.07.30	658,51
2003.07.31	657,45
2003.08.01	653,19
2003.08.04	655,80
2003.08.05	658,70
2003.08.06	657,20
2003.08.07	654,42
2003.08.08	653,30
2003.08.11	647,85
2003.08.12	649,19
2003.08.13	657,63
2003.08.14	661,48
2003.08.15	660,92
2003.08.18	665,46
2003.08.19	676,80
2003.08.21	683,26
2003.08.22	684,03
2003.08.25	683,35
2003.08.26	685,76
2003.08.27	689,62
2003.08.28	698,20
2003.08.29	704,26
2003.09.01	710,22
2003.09.02	704,99
2003.09.03	716,57
2003.09.04	719,77
2003.09.05	719,31
2003.09.08	711,30
2003.09.09	710,00
2003.09.10	700,73
2003.09.11	703,17
2003.09.12	700,51
2003.09.15	693,65
2003.09.16	705,50
2003.09.17	705,14
2003.09.18	701,45
2003.09.19	698,82
2003.09.22	686,17
2003.09.23	687,44
2003.09.24	690,39
2003.09.25	686,03
2003.09.26	687,75
2003.09.29	686,16
2003.09.30	675,37
2003.10.01	678,95
2003.10.02	687,41
2003.10.03	686,49
2003.10.06	694,70
2003.10.07	696,97
2003.10.08	711,81

2003.10.09	715,42
2003.10.10	714,13
2003.10.13	714,07
2003.10.14	723,45
2003.10.15	719,48
2003.10.16	719,18
2003.10.17	725,17
2003.10.20	723,10
2003.10.21	720,86
2003.10.22	719,05
2003.10.24	719,05
2003.10.27	703,38
2003.10.28	703,34
2003.10.29	700,30
2003.10.30	707,40
2003.10.31	704,56
2003.11.03	708,20
2003.11.04	703,40
2003.11.05	711,44
2003.11.06	710,10
2003.11.07	703,61
2003.11.10	705,26
2003.11.11	702,94
2003.11.12	709,09
2003.11.13	707,59
2003.11.14	700,98
2003.11.17	695,82
2003.11.18	694,67
2003.11.19	688,39
2003.11.20	681,25
2003.11.21	680,65
2003.11.24	688,21
2003.11.25	681,39
2003.11.26	672,63
2003.11.27	672,47
2003.11.28	665,19
2003.12.01	670,76
2003.12.02	655,01
2003.12.03	652,55
2003.12.04	652,55
2003.12.05	662,32
2003.12.08	665,04
2003.12.09	682,19
2003.12.10	673,38
2003.12.11	665,34
2003.12.12	673,32
2003.12.15	676,28
2003.12.16	674,37
2003.12.17	668,72
2003.12.18	673,73
2003.12.19	674,55
2003.12.22	674,02

2003.12.23	681,58
2003.12.29	684,28
2003.12.30	684,16
2003.12.31	681,15
2004.01.05	683,89
2004.01.06	696,93
2004.01.07	690,45
2004.01.08	694,58
2004.01.09	690,08
2004.01.12	684,90
2004.01.13	687,16
2004.01.14	690,57
2004.01.15	690,96
2004.01.16	691,30
2004.01.19	699,14
2004.01.20	702,13
2004.01.21	695,82
2004.01.22	697,90
2004.01.23	703,10
2004.01.26	704,83
2004.01.27	704,77
2004.01.28	710,70
2004.01.29	711,60
2004.01.30	713,60
2004.02.02	718,99
2004.02.03	716,38
2004.02.04	711,23
2004.02.05	714,46
2004.02.06	713,40
2004.02.09	717,05
2004.02.10	716,06
2004.02.11	707,92
2004.02.12	706,10
2004.02.13	705,05
2004.02.16	709,44
2004.02.17	704,44
2004.02.18	704,55
2004.02.19	707,93
2004.02.20	703,34
2004.02.23	702,24
2004.02.24	701,10
2004.02.25	707,47
2004.02.26	714,80
2004.02.27	713,74
2004.03.01	718,79
2004.03.02	730,34
2004.03.03	734,35
2004.03.04	744,66
2004.03.05	751,59
2004.03.08	761,15
2004.03.09	753,59
2004.03.10	757,21

2004.03.11	747,93
2004.03.12	752,07
2004.03.16	744,75
2004.03.17	758,67
2004.03.18	759,94
2004.03.19	757,21
2004.03.22	747,40
2004.03.23	755,93
2004.03.24	758,69
2004.03.25	768,19
2004.03.26	771,74
2004.03.29	774,96
2004.03.30	771,72
2004.03.31	767,91
2004.04.01	769,01
2004.04.02	782,66
2004.04.05	785,64
2004.04.06	790,81
2004.04.07	795,88
2004.04.08	798,14
2004.04.09	797,26
2004.04.13	810,53
2004.04.14	794,90
2004.04.15	805,58
2004.04.16	802,00
2004.04.19	785,34
2004.04.20	798,73
2004.04.21	797,80
2004.04.22	793,26
2004.04.23	790,00
2004.04.26	787,78
2004.04.27	779,00
2004.04.28	785,40
2004.04.29	778,84
2004.04.30	779,62
2004.05.03	778,38
2004.05.04	781,99
2004.05.05	782,87
2004.05.06	770,45
2004.05.07	761,75
2004.05.10	748,47
2004.05.11	746,23
2004.05.12	746,53
2004.05.13	740,87
2004.05.14	735,26
2004.05.17	729,85
2004.05.18	747,18
2004.05.19	762,25
2004.05.20	762,99
2004.05.21	766,91
2004.05.24	769,12
2004.05.25	761,63

2004.05.26	761,08
2004.05.27	765,46
2004.05.28	769,19
2004.06.01	762,26
2004.06.02	767,96
2004.06.03	760,85
2004.06.04	764,66
2004.06.07	767,96
2004.06.08	766,41
2004.06.09	768,32
2004.06.10	770,16
2004.06.11	758,20
2004.06.14	760,33
2004.06.15	765,27
2004.06.16	774,57
2004.06.17	765,63
2004.06.18	766,79
2004.06.21	767,13
2004.06.22	769,89
2004.06.23	772,62
2004.06.24	776,69
2004.06.25	785,90
2004.06.28	783,20
2004.06.29	790,80
2004.06.30	781,05
2004.07.01	792,75
2004.07.02	792,48
2004.07.05	791,95
2004.07.06	788,78
2004.07.07	793,47
2004.07.08	791,05
2004.07.09	785,43
2004.07.12	783,56
2004.07.13	788,54
2004.07.14	791,43
2004.07.15	791,44
2004.07.16	790,08
2004.07.19	787,89
2004.07.20	790,98
2004.07.21	791,64
2004.07.22	788,59
2004.07.23	790,66
2004.07.26	792,30
2004.07.27	791,10
2004.07.28	789,75
2004.07.29	792,37
2004.07.30	792,81
2004.08.02	787,17
2004.08.03	792,13
2004.08.04	794,75
2004.08.05	792,16
2004.08.06	788,77

2004.08.09	788,61
2004.08.10	793,66
2004.08.11	799,58
2004.08.12	804,81
2004.08.13	806,37
2004.08.16	813,54
2004.08.17	816,93
2004.08.18	817,08
2004.08.19	816,53
2004.08.23	815,82
2004.08.24	818,67
2004.08.25	818,29
2004.08.26	821,90
2004.08.27	825,10
2004.08.30	820,28
2004.08.31	826,76
2004.09.01	831,06
2004.09.02	833,52
2004.09.03	832,75
2004.09.06	830,83
2004.09.07	823,02
2004.09.08	812,62
2004.09.09	811,66
2004.09.10	812,32
2004.09.13	817,48
2004.09.14	826,53
2004.09.15	808,21
2004.09.16	816,34
2004.09.17	828,33
2004.09.20	831,76
2004.09.21	830,31
2004.09.22	830,20
2004.09.23	835,20
2004.09.24	833,20
2004.09.27	834,94
2004.09.28	839,79
2004.09.29	844,13
2004.09.30	847,94
2004.10.01	829,79
2004.10.04	835,05
2004.10.05	851,30
2004.10.06	850,39
2004.10.07	859,18
2004.10.08	858,55
2004.10.11	862,73
2004.10.12	854,84
2004.10.13	850,94
2004.10.14	850,39
2004.10.15	856,99
2004.10.18	853,83
2004.10.19	861,46
2004.10.20	865,21

2004.10.21	857,56
2004.10.22	861,64
2004.10.25	851,09
2004.10.26	855,98
2004.10.27	860,66
2004.10.28	860,51
2004.10.29	864,04
2004.11.02	874,40
2004.11.03	871,03
2004.11.04	875,29
2004.11.05	881,96
2004.11.08	879,43
2004.11.09	893,46
2004.11.10	911,54
2004.11.11	910,46
2004.11.12	910,38
2004.11.15	907,85
2004.11.16	906,58
2004.11.17	907,47
2004.11.18	917,65
2004.11.19	927,22
2004.11.22	921,32
2004.11.23	931,81
2004.11.24	932,57
2004.11.25	936,91
2004.11.26	928,86
2004.11.29	931,95
2004.11.30	932,06
2004.12.01	935,84
2004.12.02	938,60
2004.12.03	938,30
2004.12.06	944,94
2004.12.07	950,07
2004.12.08	952,72
2004.12.09	949,60
2004.12.10	938,45
2004.12.13	943,90
2004.12.14	954,26
2004.12.15	957,38
2004.12.16	965,11
2004.12.17	966,63
2004.12.20	968,32
2004.12.21	962,92
2004.12.22	958,12
2004.12.23	946,47
2004.12.27	948,89
2004.12.28	953,11
2004.12.29	959,14
2004.12.30	966,82
2004.12.31	965,26
2005.01.03	965,11
2005.01.04	978,28

2005.01.05	981,75
2005.01.06	983,19
2005.01.07	984,83
2005.01.10	981,89
2005.01.11	994,03
2005.01.12	1 004,56
2005.01.13	1 008,45
2005.01.14	1 020,82
2005.01.17	1 027,29
2005.01.18	1 018,19
2005.01.19	1 020,42
2005.01.20	1 020,48
2005.01.21	1 027,42
2005.01.24	1 018,55
2005.01.25	1 023,83
2005.01.26	1 025,28
2005.01.27	1 043,94
2005.01.28	1 048,28
2005.01.31	1 045,63
2005.02.01	1 040,91
2005.02.02	1 044,60
2005.02.03	1 068,25
2005.02.04	1 088,25
2005.02.07	1 096,71
2005.02.08	1 101,63
2005.02.09	1 105,35
2005.02.10	1 103,39
2005.02.11	1 096,55
2005.02.14	1 089,40
2005.02.15	1 102,33
2005.02.16	1 126,17
2005.02.17	1 133,08
2005.02.18	1 128,60
2005.02.21	1 145,58
2005.02.22	1 154,16
2005.02.23	1 147,78
2005.02.24	1 141,80
2005.02.25	1 172,90
2005.02.28	1 172,76
2005.03.01	1 180,41
2005.03.02	1 142,90
2005.03.03	1 150,19
2005.03.04	1 162,34
2005.03.07	1 182,63
2005.03.08	1 177,25
2005.03.09	1 177,48
2005.03.10	1 160,52
2005.03.11	1 155,35
2005.03.16	1 114,75
2005.03.17	1 103,84
2005.03.18	1 103,30
2005.03.21	1 086,80

2005.03.22	1 108,61
2005.03.23	1 103,26
2005.03.24	1 113,58
2005.03.25	1 111,46
2005.03.29	1 127,95
2005.03.30	1 118,96
2005.03.31	1 128,43
2005.04.01	1 146,73
2005.04.04	1 144,87
2005.04.05	1 150,96
2005.04.06	1 156,83
2005.04.07	1 153,67
2005.04.08	1 150,36
2005.04.11	1 136,96
2005.04.12	1 148,03
2005.04.13	1 151,56
2005.04.14	1 145,92
2005.04.15	1 134,25
2005.04.18	1 114,83
2005.04.19	1 107,67
2005.04.20	1 107,57
2005.04.21	1 089,52
2005.04.22	1 099,32
2005.04.25	1 116,01
2005.04.26	1 113,47
2005.04.27	1 098,98
2005.04.28	1 089,39
2005.04.29	1 086,97
2005.05.02	1 095,87
2005.05.03	1 093,56
2005.05.04	1 087,37
2005.05.05	1 091,45
2005.05.06	1 096,38
2005.05.09	1 089,00
2005.05.10	1 080,44
2005.05.11	1 070,18
2005.05.12	1 066,22
2005.05.13	1 053,69
2005.05.17	1 066,48
2005.05.18	1 081,31
2005.05.19	1 082,62
2005.05.20	1 091,99
2005.05.23	1 094,50
2005.05.24	1 105,25
2005.05.25	1 102,87
2005.05.26	1 105,23
2005.05.27	1 114,12
2005.05.30	1 112,90
2005.05.31	1 119,31
2005.06.01	1 131,54
2005.06.02	1 146,21
2005.06.03	1 149,75

2005.06.06	1 159,11
2005.06.07	1 170,29
2005.06.08	1 162,13
2005.06.09	1 157,48
2005.06.10	1 186,32
2005.06.13	1 191,00
2005.06.14	1 194,33
2005.06.15	1 203,91
2005.06.16	1 213,20
2005.06.17	1 206,55
2005.06.20	1 216,91
2005.06.21	1 216,87
2005.06.22	1 216,61
2005.06.23	1 210,15
2005.06.24	1 206,81
2005.06.27	1 204,79
2005.06.28	1 208,49
2005.06.29	1 218,95
2005.06.30	1 231,78
2005.07.01	1 246,40
2005.07.04	1 259,79
2005.07.05	1 253,22
2005.07.06	1 274,28
2005.07.07	1 263,22
2005.07.08	1 266,78
2005.07.11	1 261,12
2005.07.12	1 278,75
2005.07.13	1 291,68
2005.07.14	1 291,66
2005.07.15	1 294,95
2005.07.18	1 286,76
2005.07.19	1 306,32
2005.07.20	1 304,29
2005.07.21	1 298,65
2005.07.22	1 298,66
2005.07.25	1 314,44
2005.07.26	1 321,72
2005.07.27	1 335,36
2005.07.28	1 341,57
2005.07.29	1 351,51
2005.08.01	1 365,05
2005.08.02	1 382,40
2005.08.03	1 359,62
2005.08.04	1 362,99
2005.08.05	1 352,92
2005.08.08	1 360,03
2005.08.09	1 353,66
2005.08.10	1 325,88
2005.08.11	1 319,57
2005.08.12	1 301,76
2005.08.15	1 318,67
2005.08.16	1 341,80

2005.08.17	1 337,20
2005.08.18	1 333,94
2005.08.19	1 316,20
2005.08.22	1 337,57
2005.08.23	1 336,52
2005.08.24	1 353,63
2005.08.25	1 344,66
2005.08.26	1 356,54
2005.08.29	1 357,60
2005.08.30	1 376,51
2005.08.31	1 376,39
2005.09.01	1 383,93
2005.09.02	1 408,79
2005.09.05	1 396,16
2005.09.06	1 393,34
2005.09.07	1 393,75
2005.09.08	1 398,12
2005.09.09	1 424,94
2005.09.12	1 435,29
2005.09.13	1 435,29
2005.09.14	1 425,65
2005.09.15	1 431,07
2005.09.16	1 446,38
2005.09.19	1 445,87
2005.09.20	1 431,20
2005.09.21	1 419,98
2005.09.22	1 434,53
2005.09.23	1 407,70
2005.09.26	1 418,80
2005.09.27	1 448,93
2005.09.28	1 428,27
2005.09.29	1 435,09
2005.09.30	1 429,61
2005.10.03	1 451,19
2005.10.04	1 456,74
2005.10.05	1 438,58
2005.10.06	1 398,58
2005.10.07	1 387,77
2005.10.10	1 386,45
2005.10.11	1 386,89
2005.10.12	1 378,40
2005.10.13	1 331,41
2005.10.14	1 311,86
2005.10.17	1 327,35
2005.10.18	1 319,04
2005.10.19	1 271,29
2005.10.20	1 291,31
2005.10.21	1 277,06
2005.10.24	1 293,54
2005.10.25	1 299,37
2005.10.26	1 314,34
2005.10.27	1 306,28

2005.10.28	1 314,72
2005.11.02	1 350,57
2005.11.03	1 373,45
2005.11.04	1 377,94
2005.11.07	1 381,78
2005.11.08	1 365,94
2005.11.09	1 362,76
2005.11.10	1 349,48
2005.11.11	1 334,94
2005.11.14	1 335,72
2005.11.15	1 337,25
2005.11.16	1 360,69
2005.11.17	1 362,22
2005.11.18	1 366,06
2005.11.21	1 369,46
2005.11.22	1 357,89
2005.11.23	1 366,44
2005.11.24	1 383,05
2005.11.25	1 402,49
2005.11.28	1 409,49
2005.11.29	1 394,11
2005.11.30	1 382,98
2005.12.01	1 389,66
2005.12.02	1 412,59
2005.12.05	1 400,42
2005.12.06	1 371,62
2005.12.07	1 372,30
2005.12.08	1 365,15
2005.12.09	1 349,99
2005.12.12	1 364,99
2005.12.13	1 365,61
2005.12.14	1 360,77
2005.12.15	1 357,24
2005.12.16	1 371,44
2005.12.19	1 374,83
2005.12.20	1 380,53
2005.12.21	1 381,79
2005.12.22	1 357,68
2005.12.23	1 364,96
2005.12.27	1 369,81
2005.12.28	1 367,01
2005.12.29	1 378,43
2005.12.30	1 373,14
2006.01.02	1 387,71
2006.01.03	1 394,63
2006.01.04	1 424,80
2006.01.05	1 433,18
2006.01.06	1 441,82
2006.01.09	1 477,53
2006.01.10	1 471,66
2006.01.11	1 484,80
2006.01.12	1 490,83

2006.01.13	1 471,89
2006.01.16	1 484,54
2006.01.17	1 489,16
2006.01.18	1 483,55
2006.01.19	1 499,09
2006.01.20	1 506,44
2006.01.23	1 505,46
2006.01.24	1 492,35
2006.01.25	1 488,90
2006.01.26	1 468,47
2006.01.27	1 501,88
2006.01.30	1 495,50
2006.01.31	1 485,03
2006.02.01	1 504,00
2006.02.02	1 521,73
2006.02.03	1 504,07
2006.02.06	1 514,16
2006.02.07	1 525,33
2006.02.08	1 526,43
2006.02.09	1 549,68
2006.02.10	1 542,31
2006.02.13	1 541,73
2006.02.14	1 503,57
2006.02.15	1 513,48
2006.02.16	1 520,54
2006.02.17	1 562,22
2006.02.20	1 565,85
2006.02.21	1 566,31
2006.02.22	1 566,85
2006.02.23	1 561,03
2006.02.24	1 573,14
2006.02.27	1 596,91
2006.02.28	1 567,62
2006.03.01	1 571,38
2006.03.02	1 573,78
2006.03.03	1 567,56
2006.03.06	1 561,03
2006.03.07	1 528,29
2006.03.08	1 499,03
2006.03.09	1 508,33
2006.03.10	1 487,25
2006.03.13	1 497,23
2006.03.14	1 469,99
2006.03.16	1 498,10
2006.03.17	1 544,32
2006.03.20	1 541,01
2006.03.21	1 531,56
2006.03.22	1 520,27
2006.03.23	1 524,08
2006.03.24	1 540,79
2006.03.27	1 556,17
2006.03.28	1 550,06

2006.03.29	1 564,33
2006.03.30	1 573,08
2006.03.31	1 581,29
2006.04.03	1 569,70
2006.04.04	1 565,45
2006.04.05	1 558,48
2006.04.06	1 583,61
2006.04.07	1 584,17
2006.04.10	1 586,16
2006.04.11	1 598,17
2006.04.12	1 609,36
2006.04.13	1 610,53
2006.04.14	1 617,43
2006.04.18	1 612,78
2006.04.19	1 634,82
2006.04.20	1 655,80
2006.04.21	1 650,48
2006.04.24	1 669,97
2006.04.25	1 651,74
2006.04.26	1 656,36
2006.04.27	1 632,30
2006.04.28	1 635,83
2006.05.02	1 641,73
2006.05.03	1 655,63
2006.05.04	1 656,47
2006.05.05	1 682,89
2006.05.08	1 675,12
2006.05.09	1 680,60
2006.05.10	1 669,20
2006.05.11	1 657,26
2006.05.12	1 635,37
2006.05.15	1 574,77
2006.05.16	1 583,45
2006.05.17	1 550,25
2006.05.18	1 542,66
2006.05.19	1 516,59
2006.05.22	1 456,76
2006.05.23	1 479,74
2006.05.24	1 444,63
2006.05.25	1 455,26
2006.05.26	1 491,76
2006.05.29	1 521,02
2006.05.30	1 477,74
2006.05.31	1 448,46
2006.06.01	1 466,14
2006.06.02	1 486,67
2006.06.06	1 458,07
2006.06.07	1 434,80
2006.06.08	1 405,33
2006.06.09	1 389,10
2006.06.12	1 340,32
2006.06.13	1 314,70

2006.06.14	1 279,84
2006.06.15	1 305,71
2006.06.16	1 280,93
2006.06.19	1 288,18
2006.06.20	1 309,47
2006.06.21	1 335,97
2006.06.22	1 357,53
2006.06.23	1 344,91
2006.06.26	1 337,84
2006.06.27	1 365,29
2006.06.28	1 383,70
2006.06.29	1 398,54
2006.06.30	1 456,07
2006.07.03	1 454,36
2006.07.04	1 465,48
2006.07.05	1 463,03
2006.07.06	1 471,66
2006.07.07	1 479,04
2006.07.10	1 506,89
2006.07.11	1 507,68
2006.07.12	1 513,51
2006.07.13	1 480,31
2006.07.14	1 466,14
2006.07.17	1 435,86
2006.07.18	1 447,06
2006.07.19	1 459,67
2006.07.20	1 476,23
2006.07.21	1 465,89
2006.07.24	1 481,19
2006.07.25	1 499,06
2006.07.26	1 504,43
2006.07.27	1 524,80
2006.07.28	1 527,50
2006.07.31	1 556,26
2006.08.01	1 549,05
2006.08.02	1 534,58
2006.08.03	1 523,97
2006.08.04	1 532,03
2006.08.07	1 531,29
2006.08.08	1 530,06
2006.08.09	1 521,28
2006.08.10	1 487,50
2006.08.11	1 482,02
2006.08.14	1 490,40
2006.08.15	1 508,77
2006.08.16	1 510,15
2006.08.17	1 510,56
2006.08.18	1 505,73
2006.08.21	1 505,11
2006.08.22	1 503,94
2006.08.23	1 527,16
2006.08.24	1 545,87

2006.08.25	1 541,66
2006.08.28	1 534,82
2006.08.29	1 546,52
2006.08.30	1 559,92
2006.08.31	1 564,58
2006.09.01	1 567,58
2006.09.04	1 603,94
2006.09.05	1 609,83
2006.09.06	1 600,03
2006.09.07	1 567,47
2006.09.08	1 568,56
2006.09.11	1 562,79
2006.09.12	1 589,92
2006.09.13	1 611,72
2006.09.14	1 616,15
2006.09.15	1 618,35
2006.09.18	1 614,64
2006.09.19	1 593,96
2006.09.20	1 573,08
2006.09.21	1 549,81
2006.09.22	1 528,49
2006.09.25	1 532,28
2006.09.26	1 558,91
2006.09.27	1 569,96
2006.09.28	1 556,35
2006.09.29	1 553,03
2006.10.02	1 540,23
2006.10.03	1 529,00
2006.10.04	1 558,90
2006.10.05	1 554,13
2006.10.06	1 561,21
2006.10.09	1 565,88
2006.10.10	1 581,56
2006.10.11	1 568,80
2006.10.12	1 563,22
2006.10.13	1 576,35
2006.10.16	1 569,01
2006.10.17	1 547,97
2006.10.18	1 560,72
2006.10.19	1 559,75
2006.10.20	1 553,65
2006.10.24	1 559,12
2006.10.25	1 570,71
2006.10.26	1 581,70
2006.10.27	1 574,34
2006.10.30	1 564,01
2006.10.31	1 565,42
2006.11.02	1 541,42
2006.11.03	1 547,82
2006.11.06	1 570,98
2006.11.07	1 587,25
2006.11.08	1 592,04

2006.11.09	1 610,32
2006.11.10	1 600,94
2006.11.13	1 616,07
2006.11.14	1 620,87
2006.11.15	1 620,75
2006.11.16	1 626,71
2006.11.17	1 604,96
2006.11.20	1 600,43
2006.11.21	1 619,89
2006.11.22	1 622,72
2006.11.23	1 629,83
2006.11.24	1 608,49
2006.11.27	1 608,79
2006.11.28	1 592,75
2006.11.29	1 607,13
2006.11.30	1 599,99
2006.12.01	1 590,13
2006.12.04	1 596,38
2006.12.05	1 624,73
2006.12.06	1 619,22
2006.12.07	1 637,35
2006.12.08	1 626,88
2006.12.11	1 634,41
2006.12.12	1 638,16
2006.12.13	1 633,57
2006.12.14	1 650,17
2006.12.15	1 674,29
2006.12.18	1 676,85
2006.12.19	1 658,56
2006.12.20	1 679,33
2006.12.21	1 687,84
2006.12.22	1 677,85
2006.12.27	1 690,04
2006.12.28	1 701,93
2006.12.29	1 716,27
2007.01.02	1 711,56
2007.01.03	1 708,68
2007.01.04	1 706,77
2007.01.05	1 692,90
2007.01.08	1 685,78
2007.01.09	1 683,52
2007.01.10	1 664,74
2007.01.11	1 688,72
2007.01.12	1 702,88
2007.01.15	1 712,28
2007.01.16	1 717,15
2007.01.17	1 704,99
2007.01.18	1 703,96
2007.01.19	1 710,04
2007.01.22	1 717,51
2007.01.23	1 714,05
2007.01.24	1 716,77

2007.01.25	1 707,21
2007.01.26	1 698,76
2007.01.29	1 689,83
2007.01.30	1 706,97
2007.01.31	1 731,94
2007.02.01	1 739,64
2007.02.02	1 737,46
2007.02.05	1 737,59
2007.02.06	1 739,34
2007.02.07	1 732,33
2007.02.08	1 715,06
2007.02.09	1 726,38
2007.02.12	1 722,81
2007.02.13	1 724,30
2007.02.14	1 745,97
2007.02.15	1 746,08
2007.02.16	1 755,86
2007.02.19	1 757,09
2007.02.20	1 749,96
2007.02.21	1 750,10
2007.02.22	1 762,21
2007.02.23	1 765,54
2007.02.26	1 766,16
2007.02.27	1 722,23
2007.02.28	1 702,53
2007.03.01	1 672,02
2007.03.02	1 681,77
2007.03.05	1 661,09
2007.03.06	1 672,25
2007.03.07	1 651,60
2007.03.08	1 676,29
2007.03.09	1 675,53
2007.03.12	1 669,69
2007.03.13	1 682,33
2007.03.14	1 690,86
2007.03.19	1 702,21
2007.03.20	1 702,09
2007.03.21	1 694,62
2007.03.22	1 709,76
2007.03.23	1 738,59
2007.03.26	1 714,69
2007.03.27	1 719,22
2007.03.28	1 713,59
2007.03.29	1 721,78
2007.03.30	1 715,65
2007.04.02	1 734,05
2007.04.03	1 744,43
2007.04.04	1 759,14
2007.04.05	1 765,83
2007.04.06	1 774,36
2007.04.10	1 790,84
2007.04.11	1 807,60

2007.04.12	1 808,73
2007.04.13	1 828,81
2007.04.16	1 849,51
2007.04.17	1 843,82
2007.04.18	1 853,73
2007.04.19	1 862,97
2007.04.20	1 886,69
2007.04.23	1 881,72
2007.04.24	1 874,08
2007.04.25	1 877,24
2007.04.26	1 870,85
2007.04.27	1 866,56
2007.05.02	1 878,00
2007.05.03	1 883,39
2007.05.04	1 902,20
2007.05.07	1 905,84
2007.05.08	1 872,76
2007.05.09	1 879,55
2007.05.10	1 897,79
2007.05.11	1 890,98
2007.05.14	1 911,36
2007.05.15	1 900,54
2007.05.16	1 878,09
2007.05.17	1 884,36
2007.05.18	1 896,80
2007.05.21	1 885,62
2007.05.22	1 890,37
2007.05.23	1 894,43
2007.05.24	1 889,50
2007.05.25	1 891,75
2007.05.29	1 904,78
2007.05.30	1 908,85
2007.05.31	1 935,04
2007.06.01	1 948,22
2007.06.04	1 940,37
2007.06.05	1 941,03
2007.06.06	1 928,80
2007.06.07	1 913,32
2007.06.08	1 898,03
2007.06.11	1 918,32
2007.06.12	1 924,94
2007.06.13	1 930,58
2007.06.14	1 943,81
2007.06.15	1 949,47
2007.06.18	1 940,07
2007.06.19	1 936,52
2007.06.20	1 955,07
2007.06.21	1 946,91
2007.06.22	1 985,41
2007.06.25	2 017,92
2007.06.26	2 042,79
2007.06.27	2 015,85

2007.06.28	2 041,00
2007.06.29	2 050,56
2007.07.02	2 068,01
2007.07.03	2 081,45
2007.07.04	2 089,21
2007.07.05	2 087,19
2007.07.06	2 095,78
2007.07.09	2 102,91
2007.07.10	2 075,36
2007.07.11	2 067,42
2007.07.12	2 088,79
2007.07.13	2 104,14
2007.07.16	2 112,08
2007.07.17	2 120,14
2007.07.18	2 119,33
2007.07.19	2 137,12
2007.07.20	2 134,56
2007.07.23	2 146,21
2007.07.24	2 124,71
2007.07.25	2 119,00
2007.07.26	2 082,17
2007.07.27	2 093,27
2007.07.30	2 090,58
2007.07.31	2 115,50
2007.08.01	2 096,73
2007.08.02	2 101,17
2007.08.03	2 076,34
2007.08.06	2 055,51
2007.08.07	2 068,10
2007.08.08	2 085,20
2007.08.09	2 062,46
2007.08.10	2 030,04
2007.08.13	2 057,06
2007.08.14	2 033,66
2007.08.15	2 008,41
2007.08.16	1 939,48
2007.08.17	1 930,50
2007.08.21	1 939,54
2007.08.22	1 981,70
2007.08.23	1 999,25
2007.08.24	1 999,14
2007.08.27	2 006,26
2007.08.28	1 996,41
2007.08.29	2 004,26
2007.08.30	2 016,91
2007.08.31	2 036,33
2007.09.03	2 018,69
2007.09.04	2 042,24
2007.09.05	2 041,90
2007.09.06	2 030,31
2007.09.07	2 004,63
2007.09.10	2 001,78

2007.09.11	2 025,80
2007.09.13	2 042,48
2007.09.14	2 033,98
2007.09.17	2 027,19
2007.09.18	2 029,92
2007.09.19	2 054,40
2007.09.20	2 058,31
2007.09.21	2 072,47
2007.09.24	2 072,93
2007.09.25	2 086,16
2007.09.26	2 093,78
2007.09.27	2 111,91
2007.09.28	2 128,44
2007.10.01	2 129,05
2007.10.02	2 101,80
2007.10.03	2 084,29
2007.10.04	2 072,99
2007.10.05	2 084,61
2007.10.08	2 086,53
2007.10.09	2 072,28
2007.10.10	2 051,05
2007.10.11	2 074,39
2007.10.12	2 072,28
2007.10.15	2 049,55
2007.10.16	2 040,27
2007.10.17	2 046,66
2007.10.18	2 042,82
2007.10.19	2 040,67
2007.10.24	2 016,82
2007.10.25	2 013,48
2007.10.26	2 014,82
2007.10.29	2 018,17
2007.10.30	2 025,59
2007.10.31	2 031,97
2007.11.05	2 016,74
2007.11.06	2 017,29
2007.11.07	1 999,03
2007.11.08	1 985,27
2007.11.09	1 980,86
2007.11.12	1 960,95
2007.11.13	1 957,30
2007.11.14	1 947,48
2007.11.15	1 946,90
2007.11.16	1 946,85
2007.11.19	1 917,48
2007.11.20	1 902,98
2007.11.21	1 849,05
2007.11.22	1 828,95
2007.11.23	1 857,15
2007.11.26	1 818,47
2007.11.27	1 763,20
2007.11.28	1 824,41

2007.11.29	1 860,29
2007.11.30	1 881,53
2007.12.03	1 853,14
2007.12.04	1 855,21
2007.12.05	1 892,93
2007.12.06	1 892,22
2007.12.07	1 913,93
2007.12.10	1 928,87
2007.12.11	1 922,68
2007.12.12	1 930,23
2007.12.13	1 918,28
2007.12.14	1 927,01
2007.12.17	1 884,80
2007.12.18	1 898,08
2007.12.19	1 889,47
2007.12.20	1 880,10
2007.12.21	1 932,53
2007.12.27	1 926,76
2007.12.28	1 945,13
2008.01.02	1 913,25
2008.01.03	1 908,33
2008.01.04	1 887,37
2008.01.07	1 884,76
2008.01.08	1 918,81
2008.01.09	1 895,11
2008.01.10	1 888,76
2008.01.11	1 863,93
2008.01.14	1 865,57
2008.01.15	1 833,27
2008.01.16	1 784,91
2008.01.17	1 757,31
2008.01.18	1 804,42
2008.01.21	1 756,15
2008.01.22	1 746,30
2008.01.23	1 717,75
2008.01.24	1 758,98
2008.01.25	1 751,32
2008.01.28	1 744,20
2008.01.29	1 748,61
2008.01.30	1 744,76
2008.01.31	1 735,04
2008.02.01	1 761,27
2008.02.04	1 778,35
2008.02.05	1 741,27
2008.02.06	1 731,04
2008.02.07	1 699,65
2008.02.08	1 719,30
2008.02.11	1 723,57
2008.02.12	1 772,03
2008.02.13	1 800,21
2008.02.14	1 792,67
2008.02.15	1 774,00

2008.02.18	1 801,29
2008.02.19	1 787,22
2008.02.20	1 775,95
2008.02.21	1 773,18
2008.02.22	1 763,85
2008.02.25	1 764,05
2008.02.26	1 767,45
2008.02.27	1 774,65
2008.02.28	1 766,12
2008.02.29	1 756,16
2008.03.03	1 705,06
2008.03.04	1 681,06
2008.03.05	1 721,58
2008.03.06	1 691,83
2008.03.07	1 665,18
2008.03.10	1 644,12
2008.03.11	1 675,94
2008.03.12	1 677,95
2008.03.13	1 649,00
2008.03.14	1 636,88
2008.03.17	1 589,35
2008.03.18	1 619,13
2008.03.19	1 605,16
2008.03.20	1 568,31
2008.03.21	1 596,21
2008.03.25	1 616,86
2008.03.26	1 613,64
2008.03.27	1 630,91
2008.03.28	1 644,78
2008.03.31	1 623,05
2008.04.01	1 627,64
2008.04.02	1 632,27
2008.04.03	1 628,55
2008.04.04	1 629,60
2008.04.07	1 642,02
2008.04.08	1 635,18
2008.04.09	1 639,31
2008.04.10	1 631,53
2008.04.11	1 624,49
2008.04.14	1 607,49
2008.04.15	1 614,72
2008.04.16	1 605,67
2008.04.17	1 620,67
2008.04.18	1 648,93
2008.04.21	1 628,27
2008.04.22	1 640,47
2008.04.23	1 643,07
2008.04.24	1 659,29
2008.04.25	1 664,89
2008.04.28	1 671,10
2008.04.29	1 638,56
2008.04.30	1 669,63

2008.05.05	1 678,00
2008.05.06	1 695,30
2008.05.07	1 698,39
2008.05.08	1 700,46
2008.05.09	1 698,53
2008.05.13	1 704,42
2008.05.14	1 709,04
2008.05.15	1 704,31
2008.05.16	1 695,52
2008.05.19	1 678,00
2008.05.20	1 667,20
2008.05.21	1 657,82
2008.05.22	1 660,39
2008.05.23	1 650,51
2008.05.26	1 629,01
2008.05.27	1 626,45
2008.05.28	1 645,03
2008.05.29	1 634,88
2008.05.30	1 641,04
2008.06.02	1 620,94
2008.06.03	1 621,76
2008.06.04	1 605,74
2008.06.05	1 607,10
2008.06.06	1 581,53
2008.06.09	1 568,48
2008.06.10	1 546,71
2008.06.11	1 535,92
2008.06.12	1 550,49
2008.06.13	1 573,79
2008.06.16	1 553,38
2008.06.17	1 546,88
2008.06.18	1 544,69
2008.06.19	1 541,02
2008.06.20	1 479,94
2008.06.23	1 484,45
2008.06.24	1 484,68
2008.06.25	1 484,40
2008.06.26	1 481,01
2008.06.27	1 463,42
2008.06.30	1 468,85
2008.07.01	1 438,63
2008.07.02	1 437,78
2008.07.03	1 423,30
2008.07.04	1 411,90
2008.07.07	1 423,86
2008.07.08	1 436,43
2008.07.09	1 466,41
2008.07.10	1 458,63
2008.07.11	1 439,93
2008.07.14	1 457,62
2008.07.15	1 440,39
2008.07.16	1 446,29

2008.07.17	1 468,97
2008.07.18	1 467,72
2008.07.21	1 472,06
2008.07.22	1 471,76
2008.07.23	1 500,85
2008.07.24	1 501,88
2008.07.25	1 512,86
2008.07.28	1 520,90
2008.07.29	1 522,17
2008.07.30	1 561,33
2008.07.31	1 546,05
2008.08.01	1 525,17
2008.08.04	1 519,32
2008.08.05	1 530,41
2008.08.06	1 521,06
2008.08.07	1 498,99
2008.08.08	1 488,95
2008.08.11	1 488,35
2008.08.12	1 478,55
2008.08.13	1 452,37
2008.08.14	1 467,79
2008.08.15	1 480,88
2008.08.18	1 471,11
2008.08.19	1 440,97
2008.08.21	1 432,97
2008.08.22	1 452,80
2008.08.25	1 435,78
2008.08.26	1 431,28
2008.08.27	1 424,50
2008.08.28	1 447,04
2008.08.29	1 469,81
2008.09.01	1 465,87
2008.09.02	1 475,20
2008.09.03	1 455,01
2008.09.05	1 421,36
2008.09.08	1 446,44
2008.09.09	1 426,37
2008.09.10	1 434,91
2008.09.11	1 403,82
2008.09.12	1 404,96
2008.09.15	1 362,63
2008.09.16	1 332,47
2008.09.17	1 299,21
2008.09.18	1 285,40
2008.09.19	1 364,07
2008.09.22	1 358,73
2008.09.23	1 339,23
2008.09.24	1 341,95
2008.09.25	1 368,05
2008.09.26	1 389,99
2008.09.29	1 323,54
2008.09.30	1 338,57

2008.10.01	1 371,38
2008.10.02	1 371,41
2008.10.03	1 372,68
2008.10.06	1 323,20
2008.10.07	1 267,01
2008.10.08	1 215,27
2008.10.09	1 156,70
2008.10.10	1 109,03
2008.10.13	1 157,09
2008.10.14	1 192,42
2008.10.15	1 094,65
2008.10.16	1 001,61
2008.10.17	979,83
2008.10.20	969,10
2008.10.21	956,13
2008.10.22	958,46
2008.10.27	880,38
2008.10.28	937,02
2008.10.29	1 044,93
2008.10.30	1 059,37
2008.10.31	1 056,83
2008.11.03	1 098,09
2008.11.04	1 148,05
2008.11.05	1 130,60
2008.11.06	1 040,58
2008.11.07	1 055,05
2008.11.10	1 058,22
2008.11.11	999,93
2008.11.12	971,54
2008.11.13	972,46
2008.11.14	986,12
2008.11.17	974,83
2008.11.18	972,16
2008.11.19	964,71
2008.11.20	924,31
2008.11.21	928,64
2008.11.24	977,69
2008.11.25	988,84
2008.11.26	986,32
2008.11.27	1 006,58
2008.11.28	1 035,27
2008.12.01	1 017,71
2008.12.02	1 019,44
2008.12.03	1 016,36
2008.12.04	1 029,87
2008.12.05	1 010,71
2008.12.08	1 017,79
2008.12.09	1 029,47
2008.12.10	1 032,63
2008.12.11	1 025,30
2008.12.12	986,46
2008.12.15	969,63

2008.12.16	962,23
2008.12.17	998,98
2008.12.18	1 004,33
2008.12.19	999,19
2008.12.22	1 001,39
2008.12.23	989,21
2008.12.29	980,96
2008.12.30	983,24
2008.12.31	979,11
2009.01.05	1 008,01
2009.01.06	1 039,04
2009.01.07	1 015,10
2009.01.08	1 015,54
2009.01.09	992,00
2009.01.12	990,03
2009.01.13	998,89
2009.01.14	992,51
2009.01.15	970,70
2009.01.16	976,61
2009.01.19	973,33
2009.01.20	962,20
2009.01.21	964,51
2009.01.22	957,25
2009.01.23	953,89
2009.01.26	967,51
2009.01.27	956,31
2009.01.28	970,11
2009.01.29	961,03
2009.01.30	951,44
2009.02.02	957,61
2009.02.03	957,16
2009.02.04	966,51
2009.02.05	954,18
2009.02.06	962,27
2009.02.09	977,55
2009.02.10	971,88
2009.02.11	965,66
2009.02.12	964,29
2009.02.13	972,35
2009.02.16	950,52
2009.02.17	923,32
2009.02.18	868,47
2009.02.19	892,31
2009.02.20	872,24
2009.02.23	866,24
2009.02.24	864,78
2009.02.25	836,18
2009.02.26	859,97
2009.02.27	846,99
2009.03.02	847,92
2009.03.03	847,26
2009.03.04	829,52

2009.03.05	799,65
2009.03.06	821,84
2009.03.09	834,36
2009.03.10	826,13
2009.03.11	820,31
2009.03.12	803,94
2009.03.13	824,89
2009.03.16	850,73
2009.03.17	823,38
2009.03.18	825,11
2009.03.19	846,54
2009.03.20	868,59
2009.03.23	882,88
2009.03.24	874,22
2009.03.25	913,65
2009.03.26	930,80
2009.03.27	908,06
2009.03.30	884,43
2009.03.31	891,29
2009.04.01	893,78
2009.04.02	927,63
2009.04.03	939,45
2009.04.06	945,95
2009.04.07	941,67
2009.04.08	957,54
2009.04.09	992,33
2009.04.10	987,58
2009.04.14	975,46
2009.04.15	960,89
2009.04.16	981,34
2009.04.17	990,55
2009.04.20	966,92
2009.04.21	959,36
2009.04.22	985,11
2009.04.23	985,55
2009.04.24	984,60
2009.04.27	973,84
2009.04.28	971,29
2009.04.29	997,18
2009.04.30	1 002,72
2009.05.04	1 055,84
2009.05.05	1 079,15
2009.05.06	1 085,82
2009.05.07	1 096,53
2009.05.08	1 120,60
2009.05.11	1 116,65
2009.05.12	1 108,72
2009.05.13	1 068,20
2009.05.14	1 076,15
2009.05.15	1 093,95
2009.05.18	1 144,91
2009.05.19	1 152,70

2009.05.20	1 196,32
2009.05.21	1 161,95
2009.05.22	1 172,34
2009.05.25	1 188,54
2009.05.26	1 189,03
2009.05.27	1 189,93
2009.05.28	1 184,07
2009.05.29	1 151,20
2009.06.02	1 189,45
2009.06.03	1 166,03
2009.06.04	1 165,02
2009.06.05	1 189,78
2009.06.08	1 188,03
2009.06.09	1 216,45
2009.06.10	1 247,59
2009.06.11	1 243,69
2009.06.12	1 236,64
2009.06.15	1 211,04
2009.06.16	1 196,11
2009.06.17	1 181,76
2009.06.18	1 188,33
2009.06.19	1 184,80
2009.06.22	1 159,16
2009.06.23	1 161,25
2009.06.24	1 187,84
2009.06.25	1 181,74
2009.06.26	1 194,49
2009.06.29	1 213,69
2009.06.30	1 197,03
2009.07.01	1 195,22
2009.07.02	1 177,60
2009.07.03	1 167,89
2009.07.06	1 169,11
2009.07.07	1 164,58
2009.07.08	1 144,21
2009.07.09	1 152,44
2009.07.10	1 140,93
2009.07.13	1 163,62
2009.07.14	1 188,77
2009.07.15	1 215,64
2009.07.16	1 213,46
2009.07.17	1 212,01
2009.07.20	1 233,13
2009.07.21	1 242,30
2009.07.22	1 223,72
2009.07.23	1 241,08
2009.07.24	1 243,82
2009.07.27	1 254,62
2009.07.28	1 233,25
2009.07.29	1 233,63
2009.07.30	1 264,65
2009.07.31	1 274,92

2009.08.03	1 318,45
2009.08.04	1 301,28
2009.08.05	1 296,09
2009.08.06	1 307,58
2009.08.07	1 308,99
2009.08.10	1 345,55
2009.08.11	1 309,50
2009.08.12	1 311,93
2009.08.13	1 343,86
2009.08.14	1 330,85
2009.08.17	1 301,18
2009.08.18	1 323,33
2009.08.19	1 323,69
2009.08.24	1 391,03
2009.08.25	1 404,93
2009.08.26	1 392,40
2009.08.27	1 369,43
2009.08.28	1 380,85
2009.08.31	1 387,12
2009.09.01	1 375,09
2009.09.02	1 329,42
2009.09.03	1 354,76
2009.09.04	1 354,52
2009.09.07	1 388,21
2009.09.08	1 392,44
2009.09.09	1 372,84
2009.09.10	1 373,07
2009.09.11	1 386,89
2009.09.14	1 381,61
2009.09.15	1 399,89
2009.09.16	1 431,77
2009.09.17	1 450,21
2009.09.18	1 451,67
2009.09.21	1 430,49
2009.09.22	1 449,55
2009.09.23	1 466,88
2009.09.24	1 471,66
2009.09.25	1 451,22
2009.09.28	1 459,15
2009.09.29	1 448,98
2009.09.30	1 447,01
2009.10.01	1 443,47
2009.10.02	1 417,77
2009.10.05	1 409,70
2009.10.06	1 438,03
2009.10.07	1 427,11
2009.10.08	1 431,34
2009.10.09	1 426,53
2009.10.12	1 461,06
2009.10.13	1 466,31
2009.10.14	1 500,38
2009.10.15	1 497,87

2009.10.16	1 488,66
2009.10.19	1 498,54
2009.10.20	1 504,51
2009.10.21	1 499,72
2009.10.22	1 490,93
2009.10.26	1 501,19
2009.10.27	1 472,99
2009.10.28	1 421,53
2009.10.29	1 455,09
2009.10.30	1 440,20
2009.11.02	1 421,43
2009.11.03	1 383,54
2009.11.04	1 417,46
2009.11.05	1 428,12
2009.11.06	1 410,50
2009.11.09	1 459,74
2009.11.10	1 457,63
2009.11.11	1 480,96
2009.11.12	1 481,75
2009.11.13	1 462,76
2009.11.16	1 467,46
2009.11.17	1 456,23
2009.11.18	1 468,68
2009.11.19	1 436,89
2009.11.20	1 438,41
2009.11.23	1 464,60
2009.11.24	1 460,99
2009.11.25	1 441,73
2009.11.26	1 417,50
2009.11.27	1 415,28
2009.11.30	1 443,34
2009.12.01	1 453,38
2009.12.02	1 448,25
2009.12.03	1 456,88
2009.12.04	1 467,21
2009.12.07	1 465,60
2009.12.08	1 432,69
2009.12.09	1 424,80
2009.12.10	1 433,16
2009.12.11	1 452,54
2009.12.14	1 453,67
2009.12.15	1 440,49
2009.12.16	1 442,15
2009.12.17	1 439,29
2009.12.18	1 424,82
2009.12.21	1 422,90
2009.12.22	1 439,58
2009.12.23	1 437,95
2009.12.28	1 450,65
2009.12.29	1 483,67
2009.12.30	1 477,98
2009.12.31	1 469,43

2010.01.04	1 487,24
2010.01.05	1 502,65
2010.01.06	1 504,67
2010.01.07	1 490,54
2010.01.08	1 497,95
2010.01.11	1 530,83
2010.01.12	1 519,65
2010.01.13	1 527,95
2010.01.14	1 548,66
2010.01.15	1 528,98
2010.01.18	1 539,04
2010.01.19	1 547,02
2010.01.20	1 537,62
2010.01.21	1 515,93
2010.01.22	1 489,29
2010.01.25	1 491,85
2010.01.26	1 480,89
2010.01.27	1 470,84
2010.01.28	1 477,55
2010.01.29	1 489,02
2010.02.01	1 495,96
2010.02.02	1 492,82
2010.02.03	1 496,65
2010.02.04	1 443,42
2010.02.05	1 414,13
2010.02.08	1 417,87
2010.02.09	1 432,12
2010.02.10	1 438,46
2010.02.11	1 445,76
2010.02.12	1 444,55
2010.02.15	1 457,01
2010.02.16	1 471,91
2010.02.17	1 491,51
2010.02.18	1 479,42
2010.02.19	1 473,22
2010.02.22	1 475,41
2010.02.23	1 450,86
2010.02.24	1 440,88
2010.02.25	1 438,93
2010.02.26	1 474,51
2010.03.01	1 489,47
2010.03.02	1 491,14
2010.03.03	1 480,62
2010.03.04	1 486,71
2010.03.05	1 521,27
2010.03.08	1 533,57
2010.03.09	1 531,53
2010.03.10	1 551,65
2010.03.11	1 547,19
2010.03.12	1 561,00
2010.03.16	1 591,86
2010.03.17	1 595,22

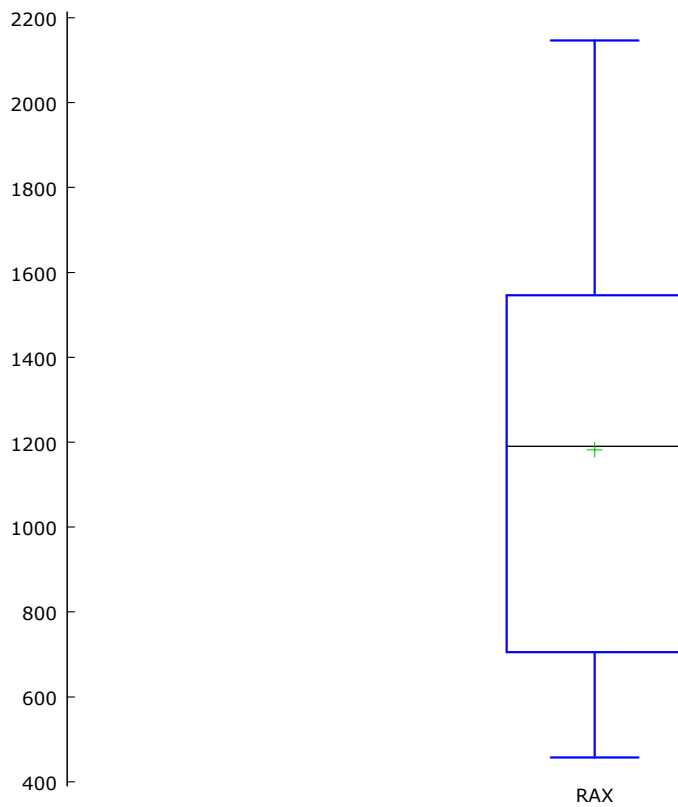
2010.03.18	1 601,71
2010.03.19	1 582,35
2010.03.22	1 592,31
2010.03.23	1 613,43
2010.03.24	1 624,82
2010.03.25	1 650,24
2010.03.26	1 632,27
2010.03.29	1 624,00
2010.03.30	1 630,14
2010.03.31	1 631,99
2010.04.01	1 673,28
2010.04.02	1 677,27
2010.04.06	1 703,79
2010.04.07	1 695,37
2010.04.08	1 650,35
2010.04.09	1 685,05
2010.04.12	1 681,45
2010.04.13	1 670,10
2010.04.14	1 674,70
2010.04.15	1 671,94
2010.04.16	1 661,40
2010.04.19	1 617,53
2010.04.20	1 610,34
2010.04.21	1 629,87
2010.04.22	1 623,89
2010.04.23	1 655,93
2010.04.26	1 678,43
2010.04.27	1 670,10
2010.04.28	1 642,83
2010.04.29	1 660,43
2010.04.30	1 663,84
2010.05.03	1 651,79
2010.05.04	1 609,89
2010.05.05	1 590,29
2010.05.06	1 573,12
2010.05.07	1 499,84
2010.05.10	1 620,24
2010.05.11	1 591,04
2010.05.12	1 602,94
2010.05.13	1 611,03
2010.05.14	1 585,20
2010.05.17	1 583,09
2010.05.18	1 595,29
2010.05.19	1 563,17
2010.05.20	1 522,40
2010.05.21	1 510,40
2010.05.25	1 458,09
2010.05.26	1 478,49
2010.05.27	1 534,37
2010.05.28	1 531,75
2010.05.31	1 536,82
2010.06.01	1 513,29

2010.06.02	1 539,70
2010.06.03	1 528,06
2010.06.04	1 489,84
2010.06.07	1 475,01
2010.06.08	1 469,92
2010.06.09	1 471,65
2010.06.10	1 480,93
2010.06.11	1 486,60
2010.06.14	1 500,54
2010.06.15	1 505,98
2010.06.16	1 502,18
2010.06.17	1 499,50
2010.06.18	1 498,35
2010.06.21	1 522,30
2010.06.22	1 517,65

2010.06.23	1 496,76
2010.06.24	1 492,21
2010.06.25	1 464,87
2010.06.28	1 468,00
2010.06.29	1 450,22
2010.06.30	1 469,77
2010.07.01	1 460,14
2010.07.02	1 479,49
2010.07.05	1 470,66
2010.07.06	1 507,26
2010.07.07	1 517,78
2010.07.08	1 564,58
2010.07.09	1 554,81
2010.07.12	1 560,08
2010.07.13	1 573,09

2010.07.14	1 581,64
2010.07.15	1 574,84
2010.07.16	1 556,81
2010.07.19	1 521,36
2010.07.20	1 534,80
2010.07.21	1 552,66
2010.07.22	1 554,75
2010.07.23	1 536,58
2010.07.26	1 548,15
2010.07.27	1 571,44
2010.07.28	1 559,97
2010.07.29	1 570,27

2. MELLÉKLET



A vizsgált RAX adatok Boxplotja

A Boxplothoz felhasznált adatok:

Numerical summary

	mean	min	Q1	median	Q3	max
RAX	1182	457,53	705,17	1190,5	1546,4	2146,2

NYILATKOZAT

Alulírott **POLGÁRNÉ HOSCHEK MÓNICA** jelen nyilatkozat aláírásával kijelentem, hogy a Statisztikai idősorelemzés a tőzsdén című

PhD értekezésem

önálló munkám, az értekezés készítése során betartottam *a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. Tv .szabályait*, valamint a Széchenyi István Gazdálkodás- és Szervezéstudományok Doktori Iskola által el_írt, a doktori értekezés készítésére vonatkozó szabályokat, különösen a hivatkozások és idézések tekintetében.

Kijelentem továbbá, hogy az értekezés készítése során az önálló kutatómunka kitétel tekintetében a programvezetőt illetve a témavezetőt nem tévesztettem meg.

Jelen nyilatkozat aláírásával tudomásul veszem, hogy amennyiben bizonyítható, hogy az értekezést nem magam készítettem, vagy az értekezéssel kapcsolatban szerzői jogsértés ténye merül fel, a Nyugat-magyarországi Egyetem megtagadja az értekezés befogadását.

Az értekezés befogadásának megtagadása nem érinti a szerzői jogsértés miatti egyéb (polgári jogi, szabálysértési jogi, büntetőjogi) jogkövetkezményeket.

Sopron, 2011. április 24.

.....

Doktorjelölt